RÉSUMÉ DU COURS

- **Prolongement par continuité :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0 de I.
Si f admet une limite finie ℓ en x_0 alors la fonction p définie sur I par

$p(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en x_0 et p est continue en x_0.

- **Limite et ordre :**

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en x_0 de I. On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Si f(x) est positif pour tout x de I, distinct de x_0, alors ℓ est positif.
Si f(x) est négatif pour tout x de I, distinct de x_0, alors ℓ est négatif.

- Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$, et pour tout x de I, différent de x_0, $f(x) \leq g(x)$ alors $\ell \leq \ell'$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ et pour tout x de I, différent de x_0, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Si pour tout x de I, $(\neq x_0)$, on a $|f(x)| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Si pour tout x de I, différent de x_0, on a $|f(x) - \ell| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Si pour tout x de I, distinct de x_0, on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Si pour tout x de I, distinct de x_0, on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

- **Fonctions monotones et limite:**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I =]a, b[(ou I =]a, +∞[ ).

* Si f est croissante et non majorée sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)
* Si f est décroissante et non minorée sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$)
* Si f est croissante et majorée sur I alors f admet une limite finie à gauche en b (ou en $+\infty$).

- **Limite d'une fonction composée :**

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout x de D_f on a f(x) appartient à D_g .

* Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to \ell} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell'$

(x_0, ℓ et ℓ' peuvent être finis ou infinis).

En particulier si $\ell \in D_g$ et g est <u>continue</u> en ℓ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(\ell)$

c'est-à-dire $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$

* Soit x_0 un élément de D_f.

Si f est continue x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.

*Si f est continue sur Df et si g est continue sur Dg alors gof est continue sur D_f.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

- Si f est positive et continue en x_0 alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.
- Si f est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est continue en x_0.

- **Continuité sur un intervalle- Image d'un intervalle :**

* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

* L'image d'un intervalle fermé borné [a, b] par une fonction continue est un intervalle fermé borné.

- **Résolution d'équations de la forme f(x) = k :**

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que a< b.

Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k possède au moins une solution dans l'intervalle [a,b].

* Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et vérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.

* Si f est une fonction continue sur un intervalle et ne s'annule en aucun réel de cet intervalle alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.

* Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a, b] et vérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe un réel unique c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.

- **Asymptote oblique à une courbe :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type [c, +∞[.

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax\right] = b$ ($b \in \mathbb{R}$)

alors la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de +∞ . (Si b = +∞ ou -∞ la courbe possède une branche parabolique de direction la droite D : y = ax au voisinage de +∞).

Le résultat est vrai pour une fonction f définie sur un intervalle du type]-∞, c] et x tendant vers -∞ .

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

Soit f (x) = x^3 - x^2 -1.
1) Sur une feuille de calcul d'un tableur, entrer les données ci-dessous :
- Placer x dans A_2 et f(x) dans B_2 ;
- Placer (-1) dans A_3 et écrire la formule = A_3*A_3* A_3 - A_3* A_3 -1 dans B_3 ;
- Ecrire la formule = A_3 + 1 dans A_4 ;

Sélectionner la ligne 3 puis étendre cette formule jusqu'à la ligne 10.
2) a- Sélectionner les colonnes A et B de la ligne 2 à la ligne 10.
b- Choisir successivement dans les menus suivants :
Avec Excel : insertion- Graphique - Nuage de points –Terminer.
c- Conjecturer sur l'ensemble des solutions de l'équation f (x) = 0.
3) Le tableau de données et le graphique laissent apparaître que f (x) = 0 admet une solution comprise entre 1 et 2 .Pour obtenir un encadrement plus précis de cette solution placer :
* en A_3 : 1 et en A_4 : = A_3 + 0.1 sélectionner la ligne 4 puis étendre la formule jusqu'à la ligne 10.
* Sélectionner les colonnes A et B de la ligne 2 à la ligne 10 et insérer le graphique Examiner le résultat, puis continuer la recherche (mettre dans A_3 : 1 et dans A_4,= A_3 + 0.05).
4) Montrer que l'équation f (x) = 0 admet, dans $\mathbb{R}$, une solution et une seule α et vérifier que α appartient à l'intervalle]1.45, 1.5[.

Activité 2

Calcul d'une limite en utilisant un logiciel de calcul formel :

Exemple : Soit à calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin(\frac{1}{x})$
- Ouvrir le logiciel Derive.
- Taper l'expression suivante : x *sin(1/x) pour exprimer $x\sin(\frac{1}{x})$.
- Valider par entrée (l'expression $x\sin(\frac{1}{x})$ va apparaître sur l'écran)
- Cliquer sur la raccourcie lim (on obtient une fenêtre où il y'a le nom de la variable x et le point limite *).
- Pour point limite compléter par +∞ puis appuyer sur simplifier.
- Il va apparaître sur l'écran les étapes et le résultat final de la limite demandée

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin(\frac{1}{x}) = 1$

Application : Déterminer à ton tour, en utilisant le logiciel Derive, chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x \; ; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \; ; \qquad \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2+x};$$

(**N.B** : l'expression $\sqrt{x^2+1} - x$ s'écrit $sqrt(x^2+1) - x$ ou $\sqrt{\ }(x\char`^2 \ +1) - x)$

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soit f la fonction définie par $f(x)=(x-2)^3$.
a) Déterminer la limite de f en 2.
b) Déterminer les limites de $\frac{1}{f}$ à droite en 2 et à gauche en 2.
c) Que représente la droite d'équation x = 2, pour la courbe de $\frac{1}{f}$?

2 1) Représenter chacune des fonctions

$$f : x \to \frac{2x}{x+1} \text{ et } g : x \to \frac{-x+1}{2x+1}$$

2) On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Préciser les asymptotes à ces courbes, aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

3 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^2+x+2\right);\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+2x+1}{x^2-x-1}\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right);\quad \lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{1-x}+1\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\sqrt{x}}{(x-1)^2}\right);\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}\right)$$

4 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-x-1\right);\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3};\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3};\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1+3\cos x\right);\quad \lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+3\cos x\right)$$

5 Etudier chacune des limites suivantes :

a) $\lim_{x\to2^+}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}$ b) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^3}$

c) $\lim_{x\to1}\left(\frac{2x^3+x^2-x-2}{x^2+3x-4}\right)$ d) $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$

e) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ f) $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$

6 On considère les fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{x}{(1+\sqrt{x})^2}\ ;\ g(x)=\frac{x^2+4}{2x}$$

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4} & \text{si } x\neq-4 \\ h(-4)=a\ ;\ a \text{ est un réel.} \end{cases}$$

1) a- Donner l'ensemble de définition et préciser le domaine de continuité de chacune de ces fonctions.
b- Pour chacune de ces fonctions donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2) Pour la fonction h, déterminer le réel a pour qu'elle soit continue en $x_0 = -4$.

7 Pour $x \in [-\frac{5}{2}, 2[\cup]2, +\infty[$ on pose

$$g(x)=\frac{x-2}{x+1-\sqrt{2x+5}}$$

a) Montrer que pour x différent de -2 et $x\in[-\frac{5}{2}, 2[\cup]2, +\infty[$, $g(x)=\frac{x+1+\sqrt{2x+5}}{x+2}$

b) En déduire que g admet un prolongement par continuité en $x_0 = 2$ que l'on précisera.

8 Trouver chacune des limites suivantes :

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{tg2x}$; $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2}$;

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{4x^2}$; $\lim_{x\to 0} \frac{tgx-\sin x}{x^2}$;

$\lim_{x\to 0} \frac{tg^2x}{1-\cos x}$.

9 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par.

$f(x)=\frac{1}{2+\cos x}$ Montrer que f est bornée.

2) En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2+\cos x}$ et

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{2+\cos x}$

10 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\sin x + 1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 & \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 0.

11 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

12 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur]-1, 1[.

13 Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ f(x) = 2x-1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur [0, 2].
2) Déterminer l'image de [0, 2] par f.
3) Déterminer l'image de [0, +∞[par f.
4) Tracer, dans un repère orthonormé du plan la courbe C représentative de f.

14 fonction g définie par $g(x)=-\frac{1}{x^2}$.

a- Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}^*$.
b- Etudier le sens de variation de g sur chacun des intervalles]-∞, 0[et]0, +∞[.
c- Déterminer les images des ces intervalles par la fonction g.

15 a- Montrer que l'équation $x^5 +3x -2 = 0$ possède une solution réelle unique α appartenant à l'intervalle]0, 1[.

b- Vérifier que $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{4}$

16 1) En considérant la fonction $f : x \mapsto x^3+2x-1$ pour $x\in$]-∞, 1[, montrer que l'équation $x^3 + 2x = 1$. admet une solution unique x_0 telle que $0 < x_0 < 1$.

2) Déterminer une valeur approchée à 0,1 prés par défaut de x_0.

17 1) Montrer que l'équation $\sin x -2x +1 = 0$ admet une solution unique β dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

En utilisant la méthode de dichotomie, déterminer une valeur approchée de cette solution à $\frac{\pi}{8}$ prés .

2) Montrer que l'équation $\frac{3}{2}x - tgx = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$.

18 On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
Montrer que l'équation P(x)=0 admet une racine réelle comprise entre 1,6 et 1,7.

19 Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^6 - x - 1$.
a) Montrer que l'équation P(x)= 0 admet une racine réelle unique α dans l'intervalle [1, 2].
b) Utiliser la dichotomie pour donner une valeur approchée par défaut de cette racine à 10^{-1} prés.
c) Vérifier que $1,2 < \alpha < 1,25$.

20 Soit la fonction : $f(x)=x^2-3x|x|$.

1) Etudier la continuité puis les variations de f sur chacun des intervalles
$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Déterminer les images des intervalles et $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par f.

21 1) Représenter sur un même graphique (unité 3 cm) la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite D d'équation $y = x + 1$.
2) Etablir à l'aide du graphique que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions, où $f(x) = x^2 - x - 1$,l'une positive qu'on notera α et l'autre négative qu'on notera β.

3) a) Placer sur la parabole et la droite D les points d'abscisses respectives $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{3}$
b) Conjecturer alors à l'aide du graphique, un encadrement de α.

4) a) Expliquer par le graphique que sur l'intervalle $[0,+\infty[$, il est équivalent de dire que $x < \alpha$ ou $f(x) < 0$.

b) En déduire que $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{3}$
c) Montrer le résultat précédent.
5) a) Montrer que $1 - \alpha$ est une solution négative de l'équation f(x) = 0.
b) En déduire à l'aide de la question 4), un encadrement de β.

22 Soit la fonction h définie par
$$h(x)=\frac{x}{|x|-1}$$
1) Préciser le domaine de définition de h et montrer que h est une fonction impaire, tracer alors la courbe (C') de h et préciser ses asymptotes.
2) Dresser le tableau de variation de h.
3) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel k le nombre des solutions de l'équation $x + k = k|x|$.

23 On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.
1) Calculer P(-1), $P(-\frac{1}{2})$, P(0) et P(1).
2) a) Montrer que l'équation P(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ trois racines distinctes qu'on les notera x_1, x_2 et x_3 avec
$x_1 < x_2 < x_3$.
b) Vérifier que $-1 < x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 0 < x_3 < 1$
3) a) Montrer que pour tout réel α on a :
$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$.
b) Montrer alors, que
$$x_1 = \cos\left(\frac{11\pi}{9}\right), \; x_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$$
$$\text{et } x_3 = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right).$$

24 On considère la fonction f définie par
$$f(x) = 2x + \sqrt{2x - 1}$$
Etudier les branches infinies de sa courbe C et tracer une allure de C.

Exercice n° 1

$f(x)=(x-2)^3 . x\in\mathbb{R}$

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^3=0$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^3}=+\infty$.

Car $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$ et $f(x)>0$ *pour* $x>2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(x-2)^3}=-\infty$.

car $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ et

$f(x)<0$ *pour* $x<2$.

c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

Donc la droite $x=2$ est une asymptote verticale

pour la courbe de $\dfrac{1}{f}$.

Exercice n° 2

●

$f(x)=\dfrac{2x}{x+1}.D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$

T.V :

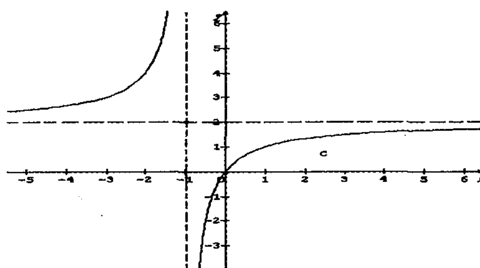
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2}=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x+1}=2$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{-2}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$



$g(x)=\dfrac{-x+1}{2x+1}.D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

$g'(x)=\dfrac{-3}{(2x+1)^2}<0$

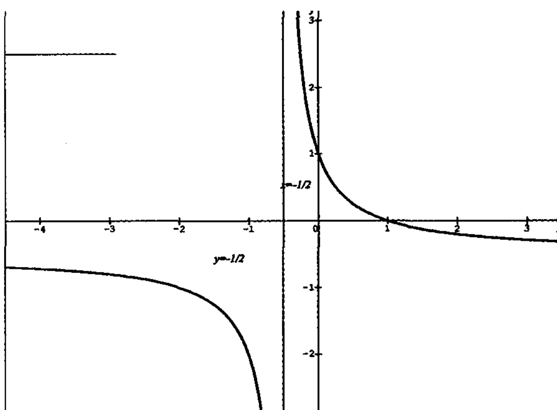
T.V

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$-1/2 \searrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow -1/2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\dfrac{-x+1}{2x+1}=\dfrac{\frac{3}{2}}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\dfrac{-x+1}{2x+1}=\dfrac{\frac{3}{2}}{0^-}=-\infty$



*/ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$.

Donc la droite $y=2$ est une asymptote à C_f au
voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

*/ $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\frac{1}{2}$.

Donc la droite $y=-\frac{1}{2}$ est une asymptote à C_g
voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

Exercice 3

*/ $\lim_{x\to-\infty}\left(2x^2+x+2\right)=\lim_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

*/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+2x+1}{x^2-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}$
$=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$

Donc la droite $y=-\frac{1}{2}$ est une asymptote à C_g au
voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

Exercice n° 3

*/ $\lim_{x\to-\infty}\left(2x^2+x+2\right)=\lim_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

*/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+2x+1}{x^2-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}$
$=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$

*/ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}+\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

*/ $\lim_{x\to-\infty}-x-\sqrt{1-x}+1=\lim_{x\to-\infty}1-x-\sqrt{1-x}$
$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}^2-\sqrt{1-x}$
$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-1\right)=+\infty$

*/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2-2x+1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$

*/ $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x}{x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x}{x}.\begin{cases}\sqrt{x^2}=|x|=-x\\ car x<0\end{cases}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=0$$

Exercice n° 4

*/ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}-x-1=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}-(x+1)$

$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}\left(1-\sqrt{x+1}\right)=-\infty$

*/ $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{1}{x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}=-1$$

*/

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^6}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^6}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

*/ $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^2}=\frac{-1}{+\infty}=0.$$

*/ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}^2-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

*/ on sait que $\forall x\in\mathbb{R}$: $-3\le 3\cos x\le 3$

D'où

$$2x+1-3\le 2x+1+3\cos x\le 2x+1+3$$

$$2x-2\le 2x+1+3\cos x\le 2x+4$$

et comme on a :

* $\lim_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty$

Donc $\lim_{x\to+\infty} 2x+1+3\cos x=+\infty$

*

$2x+1+3\cos x\le 2x+4$ *et* $\lim_{x\to-\infty} 2x+4=-\infty$

d'où $\lim_{x\to-\infty} 2x+1+3\cos x=-\infty$

Exercice n° 5

a) $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}=?$

$\lim_{x\to 2^+} x\sqrt{x-2}=0$ et $x\sqrt{x-2}>0$ pour x >2

Donc $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}=+\infty$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}^2}{(x-1)^3.\sqrt{x^2-1}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)^3.\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3.\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x-1)^2\sqrt{x^2-1}}$$

Or $\lim_{x\to 1}(x+1)=2$ et $\lim_{x\to 1}(x-1)^2.\sqrt{x^2-1}=0$

et $(x-1)^2.\sqrt{x^2-1}\ge 0$ d'où

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x-1)^2.\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

Et par suite : $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^3}=+\infty$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^3-1)+x^2-x}{x^2+3x-4}$

on a :

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ *et* $x^2-x=x(x-1)$

$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

Car : $a+b+c=0, x'=1, x''=\frac{c}{a}=-4$.

D'où $\lim_{x\to 1}\frac{2(x^3-1)+x^2-x}{x^2+3x-4}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x^2+x+1)+x(x-1)}{(x-1)(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[2x^2+2x+2+x]}{(x-1)(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3x+2}{x+4}=\frac{7}{5}$$

d) $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}=?$

On a : $\lim_{x\to 1}(x-1)\sqrt{x-1}=0$

et $(x-1)\sqrt{x-1}\ge 0$ pour $x\ge 1$

D'où $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}=+\infty$.

e) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x+5)-3^2}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+5-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

f) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-2-1)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Exercice n° 6

● a)

*/ $f(x)=\dfrac{x}{(1+\sqrt{x})^2}$, f est définie si $x\geq 0$

f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

*/ $g(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$.

g est une fonction rationnelle donc elle est définie et continue sur son ensemble de définition $D_f=\mathbb{R}^*$.

*/ la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$. car $x\mapsto\dfrac{x^2+3x+4}{x+4}$ est définie sur $IR\setminus\{-4\}$ et $h(-4)=a$.

Pour la continuité voir 2).

b) */ pour $f(x)=\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})^2}$, $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ Car $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{x})^2=+\infty$

*/ pour $g(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+4}{2x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{2x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+4}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{2x}=+\infty$

Pour $\begin{cases}h(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{x+4},x\neq-4\\ h(-4)=a\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=-\infty$

● $\lim\limits_{x\to-4}h(x)=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+3x+4}{x+4}$

Or pour l'équation: $x^2+3x+4=0$ on a: $a+b+c=0$

D'où $x'=1,x''=\dfrac{c}{a}=-4$

Par suite: $x^2+3x+4=(x-1)(x+4)$

Ce qui donne

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^2+3x+4}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{(x-1)(x+4)}{x+4}=\lim_{x\to-4}(x-1)=-5.$$

Donc puisque : $h(-4)=a$ alors la fonction h est continue en $x_0=-4$ pour $\boxed{a=-5}$.

Exercice n° 7

$x\in\left[-\dfrac{5}{2},2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$, $g(x)=\dfrac{x-2}{x+1-\sqrt{2x+5}}$

a) $x\in\left[-\dfrac{5}{2},2\right[\cup\left]2,+\infty\right[\setminus\{-2\}=I$

On a : $g(x)=\dfrac{x-2}{x+1-\sqrt{2x+5}}$

$$=\frac{(x-2)\left[x+1+\sqrt{2x+5}\right]}{\left[(x+1)-\sqrt{2x+5}\right]\left[(x+1)+\sqrt{2x+5}\right]}$$

$$=\frac{(x-2)\left[x+1+\sqrt{2x+5}\right]}{(x+1)^2-\left(\sqrt{2x+5}\right)^2}$$

$$=\frac{(x-2)\left[x+1+\sqrt{2x+5}\right]}{x^2+2x+1-2x-5}$$

$$=\frac{(x-2)\left[x+1+\sqrt{2x+5}\right]}{x^2-4}$$

$$=\frac{(x-2)\left[x+1+\sqrt{2x+5}\right]}{(x-2)(x+2)}$$

$$\boxed{g(x)=\frac{x+1+\sqrt{2x+5}}{x+2}},x\in I$$

b) $\lim\limits_{x\to2}g(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1+\sqrt{2x+5}}{x+2}$

$$=\frac{3+\sqrt{9}}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Donc g admet un prolongement par continuité h tel que :

$$\begin{cases}h(x)=g(x).\quad pour\,x\neq2\\ h(2)=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Exercice n° 8

*/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 5x}{x}}{\dfrac{\tan 2x}{x}}=\dfrac{5}{2}$

*/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$. (Posons $h=3x$.)

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cos h}{\left(\dfrac{h}{3}\right)^2}=\lim\limits_{h\to 0}\underbrace{\left(\dfrac{1-\cos h}{h^2}\right)}_{\frac{1}{2}}\times 9=\dfrac{9}{2}.$

*/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{(2x)^2}$

$\overset{h=2x}{\Longrightarrow}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cos h}{h^2}=\dfrac{1}{2}$

*/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1-\cos x}{\cos x}\right)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{1}\times\overbrace{\dfrac{1-\cos x}{x}}^{0}\times\dfrac{1}{\cos x}=0$

*/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\tan^2 x}{x^2}}{\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^2}{\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}=2.$

Exercice n° 9

● $\forall x\in\mathbb{R}: -1\le\cos x\le 1$

$\Leftrightarrow 1\le 2+\cos x\le 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2+\cos x}\le 1$

● pour $x\ge 0$ on a : $\dfrac{x}{3}\le\dfrac{x}{2+\cos x}\le x$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2+\cos x}=+\infty$

*/ $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $-1\le\sin x\le 1$

D'où : $x-1\le x+\sin x\le x+1$ donc

pour $x\ge 1$ on a :

$0\le\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2+\cos x}\le 1$

$0\le x-1\le x+\sin x\le x+1$

en multiplions membre à membre le deux inégalités on trouve: $\dfrac{x-1}{3}\le\dfrac{x+\sin x}{2+\cos x}\le x+1$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{3}=+\infty$

il résulte $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{2+\cos x}=+\infty}$

Exercice n° 10

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2\underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{1}+\overbrace{\dfrac{1-\cos x}{x}}^{0}$

$=2\ne f(0)$

Donc f n'est pas continue en $x_0=0$.

Exercice n° 11

La fonction : $x\mapsto 1-\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en

particulier sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction : $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme étant le produit de deux fonctions continues.

Continuité en $x_0=0$:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0=f(0)$ (Formule)

D'où f est continue en $x_0=0$.

Conclusion :

f est continue sur IR* et en 0 D'où est continue sur IR.

Exercice n° 12

$$\begin{cases} f(x)=\frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

*/ sur $]-1,0[$. on a : $f(x)=\frac{|x|\sqrt{|x|}}{x}=-\sqrt{-x}$ donc f est continue sur $]-1,0[$.

*/ sur $]0,1[$. on a : $f(x)=\frac{|x|\sqrt{|x|}}{x}=\sqrt{x}$ donc f est

f est continue sur $]0,1[$.

*/ continuité en 0 :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to0^-}-\sqrt{-x}=0=f(0)$$

Donc : $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0)$

D'où : f est continue en $x_0=0$.

Conclusion : f est continue sur $]-1,1[$

Exercice n° 13

$$\begin{cases} f(x)=x^2; x\in[0,1] \\ f(x)=2x-1; x\in]1,+\infty[\end{cases}$$

● $f(x)=x^2$ fonction polynôme

Donc continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,1]$.

$f(x)=2x-1$ Fonction polynôme

Donc continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]1,2]$.

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} 2x-1=1=f(1)$$

Donc f est continue a droite en 1.

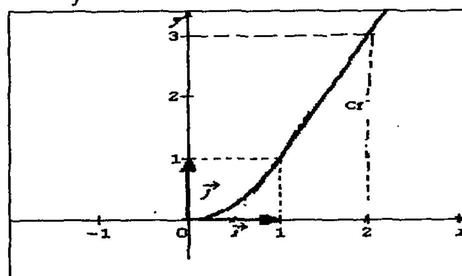
Conclusion :

f est continue sur $[0,1]$ et $[1,2]$ donc continue sur $[0,2]$.

● $\left.\begin{array}{l} f([0,1])=[0,1] \\ f(]1,2])=]1,3] \end{array}\right\rangle \Rightarrow f([0,2])=[0,3]$

● $f([0,+\infty[)=[0,+\infty[$

● Courbe C_f :



Sur $[0,1]$: C_1 est la branche de la parabole $y=x^2$.

Sur $[1,+\infty[$: C_2 est la demi - droite : $y=2x-$

$C_f=C_1\cup C_2$.

Exercice n° 14

a) $g(x)=-\frac{1}{x^2}$ est une fonction rationnelle elle est continue sur son ensemble de définition donc g est continue sur $\mathbb{R}^*$.

b) $g'(x)=\frac{2}{x^3}$.

Tableau des variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	
$g(x)$	0	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^-} g(x)=-\frac{1}{0^+}-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\frac{1}{\infty}=0$$

c) $g(]-\infty,0[)=]-\infty,0[$

$g(]0,+\infty[)=]-\infty,0[$.

Exercice n° 15

a) $f(x)=x^5+3x-2$

$f'(x)=5x^4+3>0, \forall x\in[0,1]$

f Continue sur $[0,1]$ et strictement croissante.

$f(0)=-2$ et $f(1)=2 \Rightarrow f(0)\times f(1)<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation : x^5+3x-2 possède une unique solution $\alpha\in]0,1[$.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{32}+\frac{3}{2}-2=\frac{1+48-64}{32}=\frac{-15}{32}<0$

$f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{4}-2\simeq 0,487>0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)\times f\left(\frac{3}{4}\right)<0$ Donc : $\frac{1}{2}\le\alpha\le\frac{3}{4}$

Exercice n° 16

● $f(x)=x^3+2x-1, x\in]-\infty,1[$

$f'(x)=3x^2+2>0$

f étant continue et strictement croissante sur $]-\infty,1[$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty,1[$ sur $f(]-\infty,1[)=]-\infty,2[$ et Comme $0\in]-1,2[$ alors l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-\infty,1[$ une unique solution x_0.

$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1 \\ f(1)=2 \end{array}\right\rangle \Rightarrow f(0)\times f(1)<0 \Rightarrow 0<x_0<1$

Or $x^3+2x-1=0 \Leftrightarrow x^3+2x=1$ .D'où le résultat

●

$\left.\begin{array}{l} f(0,4)=-0,136 \\ f(0,5)=0,125 \end{array}\right\rangle \Rightarrow 0,4<x_0<0,5$

Donc une valeur approchée à 0,1 prés par défaut de x_0 est :0,4.

Exercice n° 17

●*/ $\sin x-2x+1=f(x)$.

$f'(x)=\cos x-2<0$ car $\cos x\le 1$. f est continue et strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

On a : $f(0)=1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\pi<0$

Donc l'équation : $\sin x-2x+1=0$ admet dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ une unique solution $\beta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

*/ $f\left(\dfrac{0+\frac{\pi}{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{2}+1\simeq 0,13$

$\beta\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ Car $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\times f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$

*/ $f\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\simeq -0,43$

$f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\times f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$

Donc $\beta\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right[$. Or $\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$ d'où :

une valeur approchée de β à $\frac{\pi}{8}$ prés est : $\frac{\pi}{4}$

● Posons $f(x)=\frac{3}{2}x-tgx$

On a : $f'(x)=\frac{3}{2}-(1+tg^2x)=\frac{1}{2}-tg^2x$

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow tg\frac{\pi}{4}\le tgx\le tg\frac{\pi}{3}$ (tg croissante)

D'où : $1\le tgx\le\sqrt{3} \Leftrightarrow -3\le -tg^2x\le -1$

Par la suite : $-\frac{5}{2}\le\frac{1}{2}-tg^2x\le-\frac{1}{2}$

Ce qui donne : $f'(x)<0$

<u>Conclusion</u> : f est continue et strictement décroissantes sur $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right[$

$f\left(\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right[\right)=\left]\frac{\pi}{2}-\sqrt{3},\frac{3\pi}{8}-1\right[$.

Comme $0\in\left]\frac{\pi}{2}-\sqrt{3},\frac{3\pi}{8}-1\right[$, l'équation $\frac{3}{2}x-tgx=0$ admet une unique solution α. dans $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right[$

Exercice n° 18

$P(x)=2x^3-3x^2-1$

P est une fonction polynôme donc continue sur L'intervalle [1,6 ;1,7] de plus

On a : $P(1,6)=-0,488$ et $P(1,7)=0,156$

D'où $P(1,6)\times P(1,7)<0$

D'où :

L'équation $P(x)=0$ admet au moins une racine réelle α comprise entre 1,6 et 1,7

Exercice n° 19

a)

$P(x)=x^6-x-1$ continue et dérivable sur $[1,2]$.

$\Rightarrow P'(x)=6x^5-1>0\ \forall x\in]1\ ;2]$ d'où P strictement croissante sur $[1,2]$.

P(1) .P(2)=(-1).61= - 61<0

Donc l'équation $P(x)=0$ admet dans $[1,2]$ une unique solution α

b) $\alpha\in[1,2]$.

- $\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{1+2}{2}\right)=P\left(\frac{3}{2}\right)=8,89>0 \\ P(1)=-1<0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1\le\alpha\le\frac{3}{2}$

- $\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{2}\right)=P\left(\frac{5}{4}\right)=1,564>0 \\ P(1)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1<\alpha<\frac{5}{4}=1,25$

- $\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{1+\frac{5}{4}}{2}\right)=P\left(\frac{9}{8}\right)\simeq-0,09<0 \\ P\left(\frac{5}{4}\right)>0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1,125<\alpha<1,25$

- $\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{\frac{9}{8}+\frac{5}{4}}{2}\right)=P\left(\frac{19}{16}\right)=0,6166>0 \\ P\left(\frac{9}{8}\right)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1,125<\alpha<1,1875$

Conclusion: une valeur approché par défaut à 10^{-1} prés est : 1,1.

Exercice n° 20

$f(x)=x^2-3x|x|$

- */ Sur $]-\infty,0[$: $|x|=-x\Rightarrow$

$f(x)=x^2+3x^2=4x^2$ est une fonction polynôme donc f continue et dérivable sur $]-\infty,0[$ et

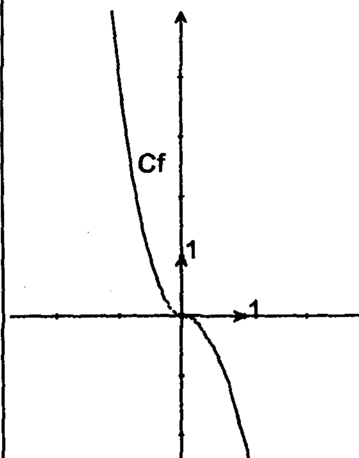
$f'(x)=8x<0$ sur $]-\infty,0[$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$.

*/ Sur $]0,+\infty[:|x|=x$

$\Rightarrow f(x)=x^2-3x^2=-2x^2$ f est une fonction polynôme donc continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x)=-4x<0$ sur $]0,+\infty[$ donc f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

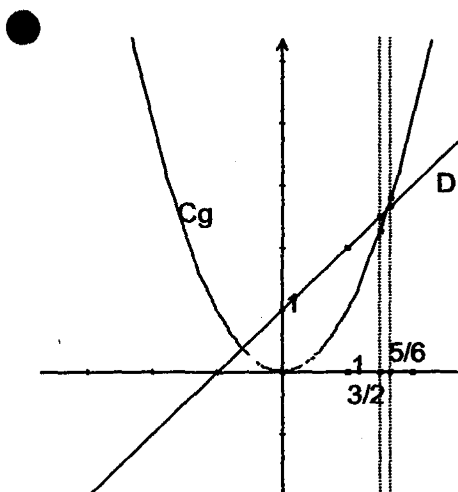
2) Courbe de f:



3) $f(]-\infty,0[)=]0,+\infty[$; $f(]0,+\infty[)=]-\infty,0[$

Exercice n° 21

-



● d'après le graphe C_g et Δ se coupent en deux points
A et B tel que :
$x_A = \beta < 0$ et $x_B = \alpha > 0$
Avec $g(x) = x^2$ et $\Delta : y = x+1$
Donc l'équation : $x^2 = x+1$ admet deux solutions α et β
Et on a : $x^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Donc $f(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha > 0$ et $\beta < 0$.

● a) $A\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right) \in \Delta ; B\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right) \in \Delta$

$A'\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right) \in C_g ; B'\left(\frac{5}{3},\frac{25}{9}\right) \in C_g$

b) On a : $x_A < \alpha < x_B$ donc $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{3}$

● a) sur $[0,+\infty[$ graphiquement
$x < \alpha \Leftrightarrow$ la courbe de g est au dessous de Δ
$\Leftrightarrow \quad x^2 < x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0$
$\Leftrightarrow \quad f(x) < 0$
Donc pour : $0 < x < \alpha : f(x) < 0$
b) sur $[0,+\infty[$
on a montré : $x < \alpha \Leftrightarrow f(x)<0$ or $f(\frac{3}{2})<0 \Rightarrow \frac{3}{2} < \alpha$
on montre de même $x > \alpha \Leftrightarrow f(x)>0$ et comme

$$f\left(\frac{5}{3}\right) > 0 \Rightarrow \frac{5}{3} > \alpha$$

Conclusion : $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{3}$

c) $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 < 0$

$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{9} - \frac{5}{3} - 1 > 0$

f Continue et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution
$\alpha \in \left]\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right[$

● a) $f(1-\alpha) = (1-\alpha)^2 - (1-\alpha) - 1$
$= 1 - 2\alpha + \alpha^2 - 1 + \alpha - 1$
$= \alpha^2 - \alpha - 1 = f(\alpha) = 0$

et $\alpha > \frac{3}{2} \Rightarrow -\alpha < -\frac{3}{2} \Rightarrow 1-\alpha < -\frac{1}{2} < 0$

Donc $f(1-\alpha) = 0$ et $1-\alpha < 0$
D'où $1-\alpha$ est une solution négative de $f(x) = 0$.

b) Comme $f(x) = 0$ admet une unique solution négative β on aura : $\beta = 1-\alpha$
or on a :

$$\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{5}{3} < -\alpha < -\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow -\frac{2}{3} < 1-\alpha < -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{-\frac{2}{3} < \beta < -\frac{1}{2}}$$

Exercice n° 22

$$h(x) = \frac{x}{|x|-1}$$

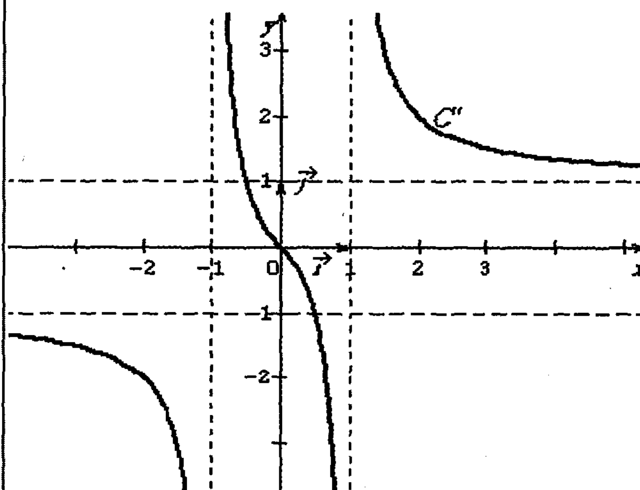
1)*/ h est définie si $|x| - 1 \neq 0$ donc
$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
*/ $x \in \{-1,1\} ; -x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

On a : $h(-x) = \frac{-x}{|-x|-1} = -\frac{x}{|x|-1} = -h(x)$

Donc h est une fonction impaire et par suite l'origine du repère est un centre de symétrie de (C').

On étudie h sur
$D_h \cap [0,+\infty[= [0,1[\cup]1,+\infty[= D_E$

$x \in D_E \Rightarrow h(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$:



$\lim_{x\to1^-} h(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to1^+} h(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ } la droite d'éq x =1 asymptote

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1\Rightarrow$ *la droite d'éq* y=1 asymptote au v+∞

2) T.V

x	0		1		$+\infty$
h'(x)	−		‖	−	
h (x)	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

●

$x+k=k|x|\Leftrightarrow k-k|x|=x\Leftrightarrow k(1-|x|)=x\,;|x|\neq1$

$\Leftrightarrow k=\frac{-x}{1-|x|}=\frac{x}{|x|-1}=h(x)$

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de C' et la droite y = k

Si $k\in[-1,1]$: une seule solution

Si $k>1$ ou $k<-1$: deux solutions.

Exercice n° 23

$P(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$

●

$P(-1)=-\frac{3}{2}$

$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

$P(0)=-\frac{1}{2}$

$P(1)=\frac{1}{2}$

● a)

$P'(x)=12x^2-3=3(4x^2-1)$=3(2x-1)(2x+1)

T.V :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$P'(x)$	+	0	−	0	+
$P(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗ $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} P(x)=\lim_{x\to+\infty}4x^3=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} P(x)=\lim_{x\to-\infty}4x^3=-\infty$

* P continue et strictement croissante sur $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

$P\left(\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\right)=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ $\quad 0\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ Donc

$P(x)=0$ admet une unique solution

$x_1\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

De même sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

<u>Conclusion :</u>

Sur $\mathbb{R}$; $P(x)=0$ admet 3 solutions

$x_1<x_2<x_3$.

b) • $P(-1)\times P\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ Donc $-1<x_1<-\frac{1}{2}$

• $P(-1)\times P(0)<0$ Donc $-1<x_2<0$

• $P(0)\times P(1)<0$ Donc $0<x_3<1$

D'où $\boxed{-1<x_1<-\frac{1}{2}<x_2<0<x_3<1}$

● a) $\cos(3\alpha)=\mathrm{Re}(e^{i3\alpha})$

On a : $(e^{i\alpha})^3=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3$

$=\cos^3\alpha+3i\cos^2\alpha\sin\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha+(i\sin\alpha)^3$

$=\cos^3\alpha+3i\cos^2\alpha\sin\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha-i\sin^3\alpha$

$\Rightarrow\cos3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha$

$=\cos^3\alpha-3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$

$\boxed{\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}$

b) on a :

$\cos\left(3\times\frac{7\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$

et $\cos\left(3\times\frac{7\pi}{9}\right)=4\cos^3\frac{7\pi}{9}-3\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$

Donc $4\cos^3\frac{7\pi}{9}-3\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)-\frac{1}{2}=0$

D'où $\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$ est solution de $P(x)=0$

$\cos\left(3\times\frac{5\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$

et $\cos\left(3\times\frac{5\pi}{9}\right)=4\cos^3\frac{5\pi}{9}-3\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$

Donc $4\cos^3\frac{5\pi}{9}-3\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)-\frac{1}{2}=0$

D'où $\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$ est solution de $P(x)=0$

$\cos\left(3\times\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

et $\cos\left(3\times\frac{\pi}{9}\right)=4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$

Donc $4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-\frac{1}{2}=0$

D'où $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution de $P(x)=0$

or $\frac{\pi}{9}<\frac{5\pi}{9}<\frac{7\pi}{9}$ *et* cos *décroissante sur* $[0,\pi]$

donc : $\cos\frac{7\pi}{9}<\cos\frac{5\pi}{9}<\cos\frac{\pi}{9}$

Par la suite :

$x_1=\cos\frac{11\pi}{9}\ ;x_2=\cos\frac{7\pi}{9}\ ;x_3=\cos\frac{\pi}{9}$

RÉSUMÉ DU COURS

• Dérivabilité en un point :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

* On dit que f est dérivable en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ tel que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \text{ ou encore } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell .$$

Le réel ℓ, est alors appelé le nombre dérivé de f en x_0 et il est noté $f'(x_0)$.

* Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$, dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(x_0)\end{pmatrix}$ et dont une équation cartésienne est donnée par : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

• Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite en un point :

* On dit que f est dérivable à gauche en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ_1 tel que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_1 \text{ ou encore } \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell_1$$

Le réel ℓ_1, est alors appelé le nombre dérivé à gauche de f en x_0 et il est noté $f'_g(x_0)$.

* On dit que f est dérivable à droite en x_0, s'il existe un nombre réel ℓ_2 tel que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_2 \text{ ou encore } \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell_2$$

Le réel ℓ_2, est alors appelé le nombre dérivé à droite de f en x_0 et il est noté $f'_d(x_0)$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I. Soit C_f la courbe de f.

La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si f est à la fois dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

• Dérivée seconde et point d'inflexion :

Théorèmes

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

* Soit f ' la fonction dérivée de f . Si la fonction f ' s'annule en x_0 sans changer de signe alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f).
* Soit f " la fonction dérivée seconde de f. Si la fonction f " s'annule et change de signe en x_0 alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f).

• Extrema :

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
* Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
* Si la fonction dérivée f ' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0 égal à $f(x_0)$.

• Dérivée d'une fonction composée :

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I. Soit g une fonction définie sur f(I).Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors g∘f est dérivable en x_0 et on a : $(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0).f'(x_0)$

Corollaire : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g est une fonction dérivable sur f (I) alors g∘f est dérivable sur I et on a : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

Application :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si de plus pour tout x de I, $f(x) > 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

• Théorème des accroissements finis (admis):

Soient deux réels a et b avec a < b.
Si f est une fonction continue sur un intervalle [a, b] et dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un réel c appartenant à]a, b[, tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Interprétation géométrique :

* Le réel f '(c) est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe (C_f) en son point d'abscisse c.
* Le rapport $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) où A(a, f(a)) et B(b,f(b)). Donc $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ équivaut à T//(AB).

• Inégalités des accroissements finis :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe deux constantes réelles m et M tels que pour tout x de I, $m \leq f'(x) \leq M$ alors pour tous réels a et b de I tels que a < b, on a :

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M.$$

Corollaire : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe $k > 0$ tels que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq k$ alors pour tous réels a et b de I on a $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

On considère un cercle de centre C et de diamètre [AB] , AB = 8 cm.
M est un point variable du diamètre [AB]. La perpendiculaire à (AB) qui passe par M coupe l'un des deux demi-cercles de diamètre [AB] en N.
1) M étant placé, calculer l'aire du triangle rectangle AMN à l'aide du logiciel utilisé.
2) Pour quelle position du point M sur [AB] l'aire du triangle AMN est-elle maximale ?

Une stratégie de résolution :

Considérer un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ et poser x = AM.

a) Prouver que $x = 8\cos^2\theta$ où $\theta = \widehat{BAN}$

b) Prouver que l'aire du triangle AMN est donnée par la formule

$S(\theta) = 8\cos\theta\sin\theta$, où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

c) En dérivant la fonction S, montrer que l'aire du triangle AMN est maximale quand M est placé au milieu de [CB].

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Montrer, en utilisant la définition de la dérivabilité en un point, que f est dérivable en 2.

b) Donner une équation de la tangente T à (Cf) au point d'abscisse 2.

c) Construire T et (C_f).

d) Donner une approximation affine de f en 2.

2 Dans chacun des cas suivants, montrer que f est dérivable en a , préciser le nombre dérivé de f en a, donner une équation de la tangente à (C_f) en son point d'abscisse a et donner une approximation affine de f en a :

1) $f : x \mapsto x^2 - 3x$; $a = -1$

2) $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x+4}$; $a = 1$

3) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 5x - 4}$; $a = 1$

3 Dans chacun des cas suivants étudier la dérivabilité de f en x_0 et donner une (ou des) équation(s) de la (ou des) tangente(s) ou demi tangente(s) à (C_f) en son point d'abscisse x_0 .

1) $f : x \mapsto x^2 + |x|$; $x_0 = 0$.

2) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; $x_0 = 2$.

3) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 4 & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$.

4) $f : x \mapsto |x^2 - x|$; $x_0 = 1$.

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = 4\sqrt{x+1} & \text{si } x \ge 3 \\ f(x) = x^2 - 5x + c & \text{si } x < 3 \end{cases}$;c est un réel.

1) Déterminer le réel c pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Pour la valeur de c trouvée, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = \sqrt{x} - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f en 1.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ f(x) = 3 + \dfrac{1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout x > 0 on a : $3 \le f(x) \le \dfrac{2}{x} + 3$.

b) En déduire la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Etudier la continuité de f en (-1) et en 0.

3) Etudier la dérivabilité à gauche de f en (-1) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) Etudier la dérivabilité de f en 0.

7 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\sin x + 1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f en 0.
b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

8 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculer f '(x) lorsqu'il existe :

a) $f : x \mapsto \sin x$; b) $f : x \mapsto \cos x$;

c) $f : x \mapsto |x|$; d) $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 7x + 3$;

e) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$; g) $f : x \mapsto \sqrt{4x-1}$;

h) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

9 Déterminer, pour chaque fonction f, le domaine de définition et préciser sur quelle partie de son domaine elle est dérivable et calculer f '(x).

1) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$

2) $f : x \mapsto \left(\dfrac{3+x}{2x+1}\right)^4$

3) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - 1}{2\cos x - 1}$

5) $f : x \mapsto \cos(2x + \dfrac{\pi}{6})$

6) $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x^2-1})$

7) $f : x \mapsto x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

10 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

1) Etablir le tableau de variation de f.
2) En déduire que f admet un minimum global que l'on précisera.
3) Montrer que f est bornée.

11 Soit la fonction f définie sur par

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

a) Montrer que f est dérivable sur]0,+∞[et que $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

b) Dresser alors, le tableau de variation de f sur]0,+∞[.

12 On considère la fonction suivante :

$$f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans]1,+∞[.
2) Montrer que f est dérivable et que pour tout x de]1,+∞[on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
3) En déduire que pour tout x de]1,+∞[on a $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

13 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etablir le tableau de variation de f.
3) Soit la fonction g définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = f(sinx) .
Montrer que g est dérivable et calculer g'(x).

14 Soit la fonction f définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \cos^2 x$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer f '(x).
b) Dresser le tableau de variation de f.
2) Soit g(x) = f(x) - x.
a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α appartenant à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$
b) Etudier le signe de g(x) sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
c) Calculer $g(\frac{\pi}{4})$ et $g(\frac{\pi}{6})$, en déduire un nouvel encadrement de .
d) Etudier la position relative de la courbe (C) de f et la droite D : y = x.

15 Soit la fonction f définie sur

$$\begin{cases} f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ f(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est continue en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3) Montrer que pour tout x de]0,+∞[on a

$$f'(x) = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

4) Etablir le tableau de variation de f.
5) Déterminer l'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.
6) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans]0,+∞[.
b) Vérifier que $1.5 < \alpha < 1.6$.
7) Etudier les branches infinies et le comportement asymptotique de f puis construire (C_f).
8) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par h(x) = f (tgx).
a) Calculer h'(x).
b) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a h(x) = 1 + cosx.

16 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1.$$

a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$g'(x) = \frac{6}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}.$$

b) Etablir le tableau de variation de g.
c) Calculer g(1). En déduire une étude de signe de g(x) sur $\mathbb{R}$.
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\sqrt{3+x^2} - x$$

a) Dresser le tableau de variation de f.
b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de f en son point d'abscisse (-1).

17 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}.$$

1) a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ et en $x_0 = (-1)$.
b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Construire, dans un repère orthonormé du plan, la courbe représentative C de f. On précisera en particulier les asymptotes à C.

Exercice n° 1

a) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2-4}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$

Donc f est. dérivable en 2 et $f'(2)=5$

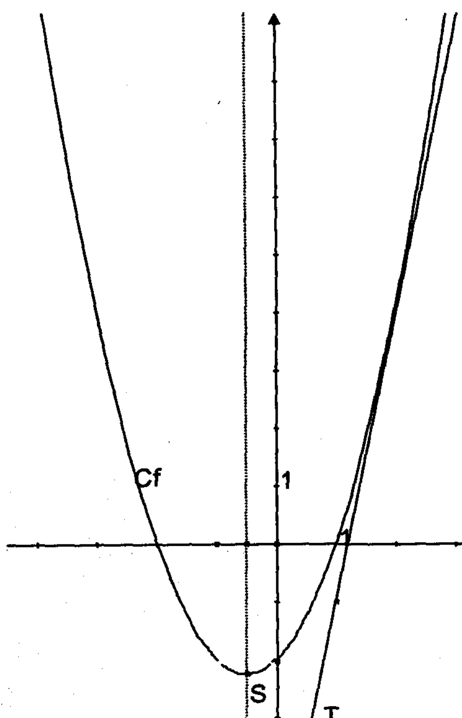
b) $T: y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$=5(x-2)+4$

$\boxed{T: y=5x-6}$

c) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2=\frac{1-2-8}{4}=\frac{-9}{4}$

C_f est une parabole de sommet le point $S(-\frac{1}{2};-\frac{9}{4})$ et D'axe de symétrie la droite d'équation : x = -1/2



d) Approximation affine de f en 2

$f(2+h)\simeq f(2)+hf'(2)\simeq 4+5h$

(h Voisin de 0)

Exercice n° 2

● $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-4)}{x+1}=-5=f'(-1).$

⊙ $T: y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$=-5(x+1)+4$

$\boxed{y=-5x-1}$

⊙ Approximation affine en a=-1

h Voisin de 0 :

$f(-1+h)\simeq f(-1)+hf'(-1)\simeq 4-5h$.

● ⊙ $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x-3}{x+4}+\frac{1}{5}}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{10x-15+x+4}{5(x+4)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{11x-11}{5(x+4)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{11(x-1)}{5(x+4)(x-1)}=\frac{11}{25}$

Donc $f'(1)=\frac{11}{25}$.

⊙ Tangente:

$T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=\frac{11}{25}(x-1)-\frac{1}{5}$

$\boxed{y=\frac{11}{25}x-\frac{16}{25}}$

⊙ Approximation affine en $a=1$

$f(1+h)\simeq f(1)+hf'(1)\simeq -\frac{1}{5}+\frac{11}{25}h$

(h Voisin de 0)

● ⊙ $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+5x-4}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{3x^2+5x-4}+2}{\sqrt{3x^2+5x-4}+2}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-4-4}{(x-1)\left[\sqrt{3x^2+5x-4}+2\right]}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+5x-8}{(x-1)\left[\sqrt{3x^2+5x-4}+2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{3(x-1)\left(x+\frac{8}{3}\right)}^{a+b+c=0}}{(x-1)\left[\sqrt{3x^2+5x-4}+2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x+8}{\sqrt{3x^2+5x-4}+2} = \frac{11}{4}.$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 1$ et $f'(1) = \frac{11}{4}$

⊙ Tangente:

$T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= \frac{11}{4}x - \frac{11}{4} + 2$ $\quad \boxed{y = \frac{11}{4}x - \frac{3}{4}}$

⊙ Approximation affine de f en 1 :

$f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1) \simeq 2 + \frac{11}{4}h$ (h Voisin de 0)

Exercice n° 3

● $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1 = f_d'(0)$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x}{x}$

$= \lim_{x\to 0^-} x - 1 = -1 = f_g'(0)$

On a: $f_d'(0) \neq f_g'(0)$ f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$

la courbe (C_f) admet deux demi - tangentes

au point d'abscisse $x_0 = 0$ ayant pour équations

$T_1: \begin{cases} y = f_d'(0)(x-0) + f(0) \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow T_1: \begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$

:

$T_2: \begin{cases} y = f_g'(0)(x-0) + f(0) \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x \leq 0 \end{cases}$

● $D_f =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{x^2-5x+6}-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)\sqrt{x^2-5x+6}}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)\sqrt{x^2-5x+6}}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-5x+6}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

f Non dérivable à gauche de $x_0 = 2$

$T: \begin{cases} x = 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Demi tangente verticale dirigé vers le haut.

●

$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 4; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}; x > 1 \end{cases}$

- Dérivabilité à droite en 1.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x^2+x+1}{x}-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x} = 0 = f_d'(1)$$

- Dérivabilité à gauche en $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+4-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x - 1 = 0 = f_g'(1)$$

On a: $f_d'(1) = f_g'(1) = 0$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$

Tangente :

$T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$T: \boxed{y = 3}$

4) • $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1 = f_d'(1)$$

• $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(1-x)}{x-1} = -1 = f_g'(1)$$

$f_d'(1) \neq f_g'(1) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.

La courbe de f possède deux demi tangentes T_1 et T_2

$T_1:\begin{cases} y=f_g'(1)(x-1)+f(1) \\ x\le 1\end{cases} \Rightarrow \boxed{T_1:\begin{cases} y=-x+1 \\ x\le 1\end{cases}}$

$T_2:\begin{cases} y=f_d'(x-1)+f(1) \\ x\ge 1\end{cases} \Rightarrow \boxed{T_2:\begin{cases} y=x-1 \\ x\ge 1\end{cases}}$

Exercice n° 4

$\begin{cases} f(x)=4\sqrt{x+1} & x\ge 3 \\ f(x)=x^2-5x+c & x<3\end{cases}$

● */ Sur $]3,+\infty[$: $f(x)=4\sqrt{x+1}$ est continue sur $]3,+\infty[$ (car $x\mapsto x+1$ continue et positive sur $]3,+\infty[$)

*/ Sur $]-\infty,3[$: $f(x)=x^2-5x+c$ fonction polynôme donc f est continue sur $]-\infty,3[$

$\Rightarrow f$ Continue sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

*/ continuité en $x_0=3$:

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} 4\sqrt{x+1}=8=f(3)$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} x^2-5x+c=-6+c$

Donc f est. Continue en $x_0=3$ si et seulement si $-6+c=8 \Rightarrow c=14$.

D'où pour f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $\boxed{c=14}$

●

*/ Sur $]3,+\infty[$: $f(x)=4\sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-\infty,3[$ (car $x\mapsto x+1$ dérivable et strictement positive sur $]3,+\infty[$)

*/ Sur $]-\infty,3[$: $f(x)=x^2-5x+c$ fonction polynôme donc f est dérivable Sur $]-\infty,3[$

$\Rightarrow f$ derivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

<u>Dérivabilité en</u> $x_0=3$:

• $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{4\sqrt{x+1}-8}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3^+}\frac{(4\sqrt{x+1}-8)(4\sqrt{x+1}+8)}{(x-3)(4\sqrt{x+1}+8)}$

$=\lim_{x\to 3^+}\frac{16(x+1)-64}{(x-3)(4\sqrt{x+1}+8)}$

$=\lim_{x\to 3^+}\frac{16(x+1-4)}{(x-3)(4\sqrt{x+1}+8)}$

$=\lim_{x\to 3^+}\frac{16(x-3)}{(x-3)(4\sqrt{x+1}+8)}=1=f_g'(1)$

$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-5x+14-8}{x-3}$

$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=1$

<u>Conclusion</u> : $f_g'(3)=f_d'(3)=1$

$\Rightarrow f$ est dérivable en $x_0=3$ et $f'(3)=1$

Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\begin{cases} f'(x)=2x-5 \; pour \; x<3 \\ f'(3)=1 \\ f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}} \; pour \; x>3\end{cases}$

Exercice n° 5

● $x\mapsto x^2-1$ est continue sur IR (Fonction polynôme) donc en particulier elle est continue sur $]-\infty,1]$.

$x\mapsto\sqrt{x}-1$ est continue pour $x\ge 0$ en particulier elle est continue sur $]1,+\infty[$.

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}-1=0=f(1)$

D'où f est continue en $x_0=1$ et par la suite sur IR

● a) */ $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2=f_g'(1)$

*/ $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}=f_d'(1)$

<u>Conclusion :</u>

$f_g'(1)\neq f_d'(1)\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $x_0=1$.

b) Interprétation géométrique :

Au point d'abscisse $x_0=1, C_f$ admet Deux demi tangentes d'équations :

$T_1\begin{cases} y=2x-2 \\ x\le 1\end{cases}$ $T_2\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\ x\ge 1\end{cases}$

Exercice n° 6

a) on sait que $\forall \alpha \in \mathbb{R} : -1 \le \cos\alpha \le 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \le \cos\pi x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1-\cos\pi x$
Pour $x>0$ on aura:

$$0 \le \frac{1-\cos\pi x}{x} \le \frac{2}{x}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$3 \le 3+\frac{1-\cos\pi x}{x} \le 3+\frac{2}{x}$$

Donc $\forall x>0 : 3 \le f(x) \le 3+\frac{2}{x}$

b) Appliquant le théorème de comparaison:

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}+3=3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

*/ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} 2x+\sqrt{x^2-1}=-2=f(-1)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} 2x^3-3x^2+3$
$=-2=f(-1)$

f Continue à droite et à gauche en

$x_0=-1$ D'où f est continue en $x_0=-1$.

*/ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=3=f(0)$

$\boxed{\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}=0}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 3+\frac{1-\cos\pi x}{\pi x}\times\pi$
$=3+0=3=f(0)$

Donc f continue en 0.

Dérivabilité de f a gauche en $x_0=-1$:

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{2x+\sqrt{x^2-1}+2}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{2x+2}{x+1}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{2(x+1)}{x+1}+\frac{x^2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^-} 2+\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}=2+\frac{-2}{0^+}=-\infty.$

f n'est dérivable a gauche en $x_0=-1$.

C_f admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse $x_0=-1$.

Dérivabilité a gauche on 0:

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2x^3-3x^2+3-3}{x}=\lim\limits_{x\to0^-} 2x^2-3x=0=f'_g(0)$

Dérivabilité à droite en 0 :

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3+\frac{1-\cos\pi x}{x}-3}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos\pi x}{x^2}=\frac{\pi^2}{2}=f'_d(0)$

$Car : \boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{2}}$

$f'_g(0)\ne f'_d(0)$: f non dérivable en $x_0=0$.

Exercice n° 7

a/ $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x+1-\cos x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0} 2\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{1}+\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{0}=2\ne f(0)=1$

f n'est pas continue en 0.

b/ f n'est pas continue en 0 donc f n'est pas Dérivable en 0

Exercice n° 8

a/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\cos x$.

b/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-\sin x$.

c/ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x)=\begin{cases}1 & si\ x>0\\ -1 & si\ x<0\end{cases}$

d/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3x^2-10x+7$

e/ f est dérivable pour tout x vérifiant : $x^2+x-2\ne0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ et

$$f'(x)=\frac{2(x^2+x-2)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-4-(4x^2+4x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x^2-2x-5}{(x^2+x-2)^2}.$$

g/ f est dérivable pour $4x-1>0$

Donc f est dérivable sur $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$

et $f'(x)=\frac{(4x-1)'}{2\sqrt{4x-1}}=\frac{2}{\sqrt{4x-1}}$

h/ f est dérivable pour $1-\cos x \neq 0$

Donc pour $\cos x \neq 1$ d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ et on a:

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'(1-\cos x)-\sin x\,(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)^2}=\frac{1}{\cos x-1}.$$

Exercice n° 9

● $D_f=\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x.x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

● f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

et $f'(x)=4\left(\frac{3+x}{2x+1}\right)'\left(\frac{3+x}{2x+1}\right)^3$

$$=4\left(\frac{-5}{(2x+1)}\right)\left(\frac{3+x}{2x+1}\right)^3$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-20(x+3)^3}{(2x+1)^4}}$$

● On a: $\frac{x+1}{x-1}\geq 0$ pour: $x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left]1,+\infty\right[=J$

D'où f est définie sur J.

f est dérivable pour tout x tel que : $\frac{x+1}{x-1}>0$

Donc est dérivable sur $J\setminus\{-1\}$.

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$$=\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}=\boxed{-\frac{1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}}$$

● f est définie et dérivable pour $2\cos x-1\neq 0$

Or on a : $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z}$$

D'où : f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus$

$\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi, -\frac{\pi}{3}+2k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

et on a :

$$f'(x)=\frac{\cos x.(2\cos x-1)+2\sin x.(\sin x-1)}{(2\cos x-1)^2}$$

$$=\frac{2\cos^2 x-\cos x+2\sin^2-2\sin x}{(2\cos x-1)^2}$$

$$=\frac{2-\cos x-2\sin x}{(2\cos x-1)^2}$$

● f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

● f est définie sur $\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

et elle est dérivable sur $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

et on a : $f'(x)=(\sqrt{x^2-1})'.(-\sin(\sqrt{x^2-1}))$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.\sin\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$$

● On a pour $x\neq 0$: $-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1$

$$\Leftrightarrow -x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$$

$$\overset{pour\ x>0}{\Leftrightarrow} -x\leq \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\leq x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

D'où f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$

$$-x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$$

$$\overset{pour\ x<0}{\Leftrightarrow} x\leq \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\leq -x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

D'où f est dérivable a gauche en 0 et $f_g'(0)=0$

et par suite est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=2x.\sin\frac{1}{x}+x^2\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad pour\ x\neq 0$$

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \quad pour\ x\neq 0$$
$$f'(0)=0$$

Exercice n° 10

● $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

T.V:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1 ↘	-1	↗ 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

● f admet un minimum globale -1 pour la valeur 0.

● $f(]-\infty,0])=[-1,1[$

$f([0,+\infty[)=[-1,1[$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $\boxed{-1\leq f(x)\leq 1}$ donc f est bornée

Exercice n° 11

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

a) $x\mapsto 1-\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x\mapsto 1+\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$1+\sqrt{x}\neq 0;\forall x>0$ D'où f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)'\left(1+\sqrt{x}\right)-\left(1+\sqrt{x}\right)'\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2},\forall x>0$$

b) $f'(x)<0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\overset{t=\sqrt{x}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1-t}{1+t}=-1$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	1 ↘	-1

Exercice n° 12

$f:]1,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

● L'équation $f(x)=x$ est équivalente à $f(x)-x=0$

Posons $g(x)=f(x)-x$.

On a: $g(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}-x$ est continue sur $]1,+\infty[$

Et on a : $g'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-1<0$

g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

D'où g est une bijection de $]1,+\infty[$ sur

$\left]\lim_{x\to+\infty} g,\lim_{x\to1^-} g\right[=\ ]-\infty,1[=J$

Comme $0\in J$ l'équation $g(x)=0$ Par suite $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in]1,+\infty[$.

● $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\sqrt{x}\neq 0$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]1,+\infty[$

et pour tout réel $x\in]1,+\infty[$.

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Or $x>1\Rightarrow x\sqrt{x}\geq 1$

$\Rightarrow\frac{1}{2x\sqrt{x}}\leq\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0\leq\frac{1}{2x\sqrt{x}}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2x\sqrt{x}}\leq\frac{1}{2}$

$\Rightarrow|f'(x)|\leq\frac{1}{2},\forall x>1.$

● f est continue sur $]1,+\infty[$ et dérivable sur $]1,+\infty[$

et $\forall t\geq 1:|f'(t)|\leq\frac{1}{2}$

$x>1;\alpha>1$ D'après l'inégalité des accroissements finis on a : $|f(x)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$

Comme $f(\alpha)=\alpha$ on aura : $|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

Exercice n° 13

Soit $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

● f est définie lorsque $\frac{x}{x-1}\geq 0$ *et* $x-1\neq 0$

$\Rightarrow D_f=]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$

● f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{2\times\sqrt{\frac{x}{x-1}}}=\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{2\times\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}<0;\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$$

Tableau des variations:

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	1 ↘ 0		$+\infty$ ↘ 1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\sqrt{1}=1\ ;\ \lim_{x\to1^+}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\sqrt{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

● **erreur** : $g(x)=f(\sin x),\ x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$x\mapsto\sin x$ est dérivable sur

$\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,1[$

Or f n'est pas définie sur $]0,1]$

Donc g n'est pas définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (impossible).

Exercice n° 14

$f(x)=\cos^2 x,x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

● a) $x\mapsto\cos x$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos^2 x$ est Dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$f'(x)=2(-\sin x)\cos x=-2(\sin x).\cos x$

$\boxed{f'(x)=-2\cos x.\sin x=-\sin 2x}, x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

b) On a: $\cos x>0$ et $\sin x>0$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc

$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[:f'(x)<0$

T.V:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

● a) $g'(x)=f'(x)-1<0$

g continue et strictement décroissante donc g est une Bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},1\right[$

Comme $0\in\left]-\frac{\pi}{2},1\right[$, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) */ si $x\leq\alpha\Leftrightarrow g(x)\geq g(\alpha)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$

. */ $x\geq\alpha\Leftrightarrow g(x)\leq g(\alpha)\Leftrightarrow g(x)\leq 0$.

(Car g est décroissante)

c) $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}<0$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}-\frac{\pi}{6}>0$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right).g\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$ Donc $\boxed{\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{6}}$.

d) Position de C_f et Δ :

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)-x$	+	0	−
position	(C) au Dessus de D		(C) au dessous de D

(C) coupe D

Exercice n° 15

● $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}2-\sqrt{x^2-x}=2=f(0)$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=2=f(0)$

f Continue a gauche et à droite

Donc f est continue en $x_0=0$.

● / $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2-\sqrt{x^2-x}-2}{x}$

$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(x^2-x)}{x\times\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{x(x-1)}{x\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\Rightarrow f$ non dérivable à gauche en 0

Interprétation graphique : (C_f) admet une demi- tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse 0

*/ $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-2}{x}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-(1+x^2))}{x\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}=0$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$

Conclusion: f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique : (C_f) admet une demi- tangente horizontale à droite au point d'abscisse 0

● Pour $x\in]0,+\infty[$ $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x)=-\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}=-\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}=\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x)<0$ *pour* $x>0$

● Pour $x<0$: $f(x)=2-\sqrt{x^2-x}$

$f'(x)=0-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$

$f'(x)>0$ *pour* $x<0$

T.V:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2	↘ 1

$\lim_{x\to-\infty}2-\sqrt{x^2-x}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}1+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}_{\searrow 0}=1$

● Les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses ont pour abscisses les solutions de $f(x)=0$.

•pour $x<0$:

$2-\sqrt{x^2-x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x}=2$

$\Leftrightarrow x^2-x=4\Leftrightarrow x^2-x-4=0$

$\Delta=25\Leftrightarrow\sqrt{\Delta}=5$

$x'=\frac{1+5}{2}$ ou $x''=\frac{1-5}{2}=-2$

$x'=3>0$ (à Rejeté) ou $\boxed{x''=-2}$

• Pour $x>0$:

$1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0\Leftrightarrow\sqrt{1+x^2}=-1$. Impossible

Donc $(C_f)\cap(xx')=\{A(-2,0)\}$

● a) $f(x)=x\Leftrightarrow g(x)=f(x)-x=0$

Sur $]0,+\infty[$:

$g'(x)=f'(x)-1<0$ car $f'(x)<0$

D'où g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et $g(]0,+\infty[)=]-\infty,2[$.

(car $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=1-\infty=-\infty$

$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)-x=2-0=2$)

Comme $0\in]-\infty,2[$ l'équation $g(x)=0$

et par suite $f(x)=x$ admet dans $]0,+\infty[$

une unique solution α

b) $g(1,5)=f(1,5)-1,5\simeq 0,05$

$g(1,6)=f(1,6)-1,6\simeq -0,07$

$g(1,5)\times g(1,6)<0\Rightarrow 1,5<\alpha<1,6$

● */on a: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1\Leftrightarrow y=1$

est une asymptote a C_f au voisinage de $+\infty$.

*/ $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\sqrt{x^2-x}}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(-\overbrace{\frac{2}{x}}^{\searrow 0}-\overbrace{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}^{\searrow 1}\right)}{x}=1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim_{x\to-\infty} 2-\sqrt{x^2-x}-x$

$= \lim_{x\to-\infty} 2-\left(\sqrt{x^2-x}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} 2-\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x}$

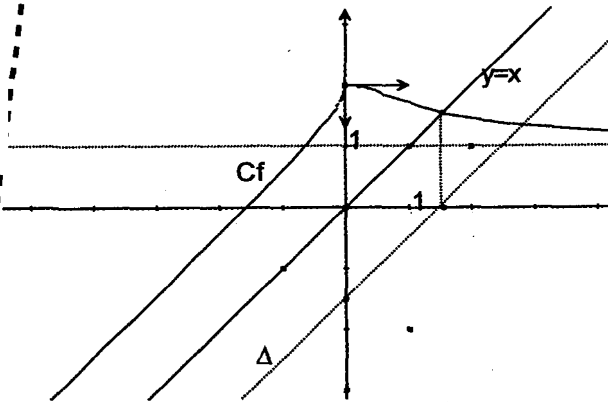
$= \lim_{x\to-\infty} 2+\frac{x}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x\to-\infty} 2+\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}$

$= 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Conclusion.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ *et* $\lim_{x\to\infty} f(x)-x=-\frac{3}{2}$

Donc: $\Delta : y=x-\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique a C_f au Voisinage de $-\infty$.



8) a) $h(x)=f(\text{tg}x)$

On a: $tg\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=[0,+\infty[$

Donc $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[: tgx\in[0,+\infty[$

$h'(x)=(tgx)'f'(tgx)$ (fonction composée)

$= \cancel{(1+tg^2x)}\frac{-tgx}{\cancel{(1+tg^2x)}\left(\sqrt{1+tg^2x}\right)}$

$\boxed{h'(x)=\frac{-tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}}, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

b) $h(x)=f(tgx)=1+\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}$

Or. $1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$, d'où $\sqrt{1+tg^2x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}$

$=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{\cos x}$ (car $\cos x>0$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$)

Donc $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $h(x)=1+\frac{1}{\frac{1}{\cos x}}$

$\Leftrightarrow \boxed{h(x)=1+\cos x}, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice n° 16

$g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}-1$

● a) $x\mapsto 2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x\mapsto x^2+3$ dérivable sur $\mathbb{R}$

et $x^2+3>0$ donc $\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ on a:

$g'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+3}-2x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}$

$g'(x)=\frac{2(x^2+3)-2x^2}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}=\frac{6}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

$\boxed{g'(x)=\frac{6}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}}$

b) $g'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

T.V:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	-3 ↗	0	↗ 1

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}-1 \underset{|x|=-x}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1=-3$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1$

$\underset{|x|=x}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1=1$

c) $g(1)=\frac{2}{\sqrt{4}}-1=1-1=0$

Si $x\geq 1$ alors $g(x)\geq g(1)=0$

Si $x\leq 1$ alors $g(x)\leq g(1)=0$

x	-∞	1	+∞
g(x)	-	0	+

● $f(x)=2\sqrt{3+x^2}-x$

a) $x^2+3>0$: f est dérivable sur ℝ et on a :

$$f'(x)=2\times\frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}}-1=\frac{2x}{\sqrt{3+x^2}}-1=g(x)$$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

T.V:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{3+x^2}-x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\underbrace{2\sqrt{\frac{3}{x^2}+1}-1}_{1}\right)=+\infty$$

b) $T: y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$= -2(x+1)+5 \Rightarrow \boxed{y=-2x+3}$

Exercice n° 17

$$f(x)=\frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$$

1) a) signe de x^2+x

x	$+\infty$	-1		0	$+\infty$
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$

*/ Dérivabilité à gauche en 0

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{-(x^2+x)+1}{-x+1}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x^2-x+1+x-1}{x(-x+1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{-x+1}=0=f'_g(0)$$

*/ Dérivabilité à droite en 0 :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2+x+1}{x+1}-1}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x+1-x-1}{x(x+1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x+1}=0=f'_d(0)$$

Conclusion:

$f'_g(0)=f'_d(0)$ Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

*/ Dérivabilité à gauche en -1 :

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\frac{x^2+x+1}{-x+1}-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2(x^2+x+1)+x-1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x^2+3x+1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x+1}{2(-x+1)}=-\frac{1}{4}=f'_g(-1)$$

*/ Dérivabilité a droite en -1 :

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-2x^2-2x+2+x-1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-2x^2-x+1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-2x+1}{2(-x+1)}=\frac{3}{4}=f'_d(-1)$$

Conclusion:

$f'_g(-1)\neq f'_d(-1)$ donc f non dérivable en $x_0=-1$.

b) Au point d'abscisse 0, C_f admet une tangente horizontale. $y=0$

Au point d'abscisse $x_0=-1$, C_f admet deux demi -tangentes de coefficients directeurs respectives $-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

2) Expression de $f(x)$ sans valeur absolue:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{-x+1}, x\le -1 \\ f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{-x+1}, x\in[-1,0] \\ f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}, x\ge 0 \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{(-x+1)^2}, x\le -1 \\ f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(-x+1)^2}, x\in]-1,0[\\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}, x\ge 0 \end{cases}$$

On a:

$-x^2+2x+1=0, \Delta'=2$

$x'=1-\sqrt{2}\notin]-\infty,-1[$ et $x''=1+\sqrt{2}\notin]-\infty,-1[$

Donc:

x	$+\infty$	x'		x''	$+\infty$
$-x^2+2x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow f'(x)<0 \quad sur\ ]-\infty;-1[$

On a aussi: $x^2-2x>0$ pour $x\in]-1,0[$

et $x^2+2x\ge 0$ pour $x\in[0,+\infty[$.

T.V :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗		↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}=+\infty$$

<u>Branches infinies</u>:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

Donc $\Delta: y=x$ est une asymptote à C_f au $V_{+\infty}$.

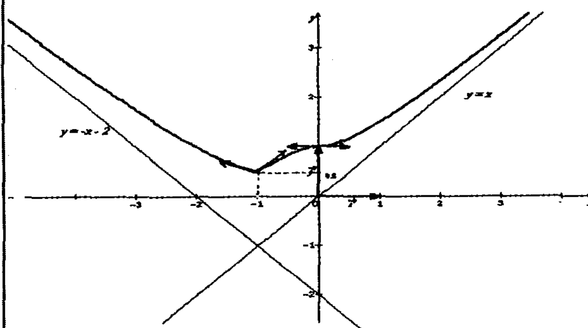
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x(-x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{-x^2+x}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{-x+1}+x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-x^2+x}{-x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{-x+1}=-2$$

Donc $\Delta': y=-x-2$ est une asymptote oblique a C_f au Voisinage de - ∞.



RÉSUMÉ DU COURS

Restriction d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C) sa représentation graphique dans un repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit I une partie de D.
On appelle restriction de la fonction f à I, la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$.
La représentation graphique de g est formée par les points M de (C), de coordonnées (x, f(x)) où $x \in I$.

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I d'extrémités a et b ($a < b$)

Si f est strictement croissante sur I alors	Si f est strictement décroissante sur I alors
$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$	$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$
$f(]a, b]) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x) , f(b)]$	$f(]a, b]) = [f(b) , \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$f([a, b[) = [f(a) \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$f([a, b[) =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)]$
$f(]a, b[) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$f(]a, b[) =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$

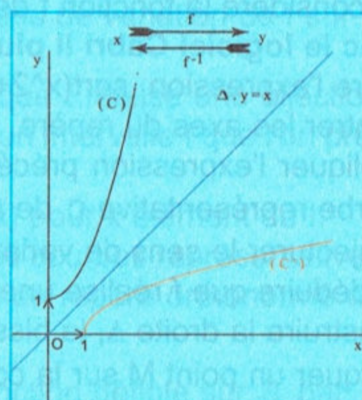
- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de la forme $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$.

Si f est strictement croissante sur I alors	Si f est strictement décroissante sur I alors
$f(]-\infty, a]) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(a)]$	$f(]-\infty, a]) = [f(a), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$
$f([a, +\infty[) = [f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f([a, +\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(a)]$
$f(]-\infty, +\infty[) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f(]-\infty, +\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Théorème de la bijection :

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors on a :

1) f est une bijection de I sur f (I).
2) La fonction réciproque f^{-1}, de f, est strictement monotone sur f (I) et plus précisément elle a le même sens de variation que f.
3) Pour tout x de I et pour tout y de f (I), $y = f(x)$ équivaut à $x = f^{-1}(y)$.
4) Si de plus, f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur l'intervalle J = f (I).
5) Les courbes représentatives (C) et (C') de f et f^{-1}, dans un repère orthonormé du plan, sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$ du repère.



Dérivée d'une fonction réciproque :

Théorème

Soit f une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur J = f(I) ; soit x_0 un réel de I et $y_0 = f(x_0)$.
Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable en y_0 et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} .$$

Corollaire

Soit f une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur J = f(I).
Si f est dérivable sur I et f ' ne s'annule pas sur I alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur J et on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} .$$

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} + 2x$.

Avec le logiciel Cabri II plus,

Ecrire l'expression sqrt(x^2+1) + 2x.

Montrer les axes du repère.

Appliquer l'expression précédente sur l'un des axes du repère. On obtient ainsi, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.

Conjecturer le sens de variation de f.

En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Construire la droite Δ, la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$, où A(0, 1) et B(1, 0).

Marquer un point M sur la courbe $\mathcal{C}$ (point sur objet).

Construire le point M' l'image de M par la symétrie axiale S_Δ.

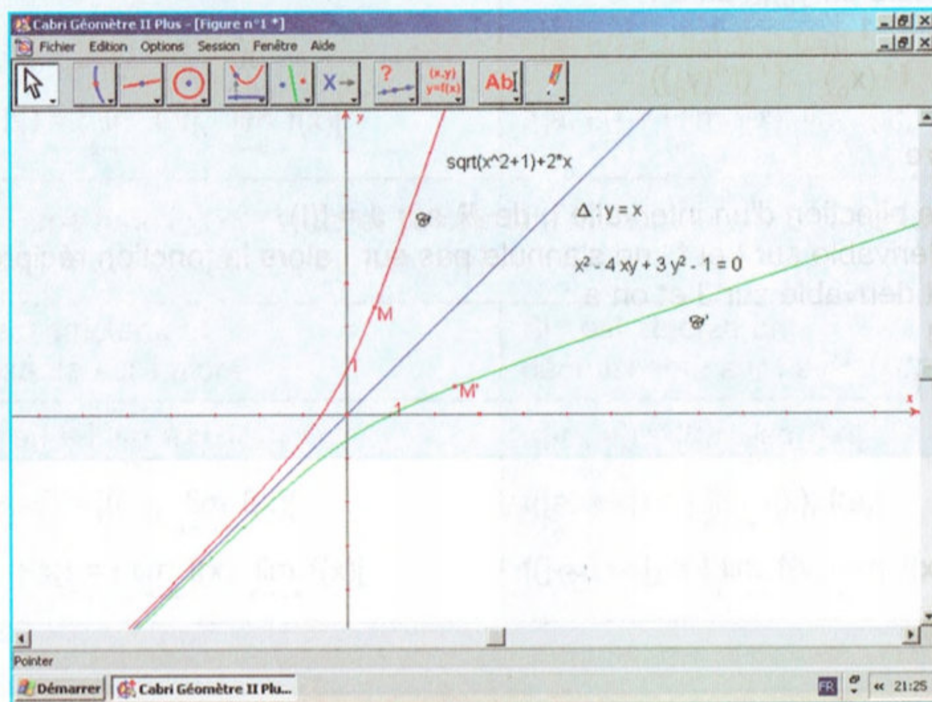
Tracer le lieu $\mathcal{C}$ ' du point M' quand M varie sur $\mathcal{C}$. Que représente la courbe $\mathcal{C}$ ' ?

Utiliser **coordonnées ou équation** du logiciel pour afficher l'équation (E') de la courbe $\mathcal{C}$ '.

Montrer que $(E') \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y \in \left\{\frac{2x+\sqrt{x^2+3}}{3}; \frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{3}\right\}$

Déplacer le point M jusqu'à le point A et conjecturer que B est un point de la courbe$\mathcal{C}$ '.

En déduire la valeur de y qui correspond à l'expression de $f^{-1}(x)$.



EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1$.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition J.

b) Calculer $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(3)$.

c) Donner le sens de variation de f^{-1} et préciser sur quel ensemble elle est dérivable.

d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x élément de J.

e) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives de f et f^{-1}.

2 Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = -1+\sqrt{x}$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque.

b) Préciser le domaine de définition J de g^{-1}.

c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour x élément de J.

e) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives de g et g^{-1}.

3 On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

1) Montrer que h admet une fonction réciproque, et préciser le domaine de définition J de h^{-1}.

2) Calculer $h^{-1}(x)$ pour x élément de J.

3) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives de h et h^{-1}.

4 On considère la fonction suivante :

$$f: \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \operatorname{tg} x$$

1) Montrer que f est bijective.

2) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives de f et f^{-1}.

5 Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-1+2x}{6+3x}$

a) Donner le sens de variation de f sur $]-2, +\infty[$.

b) En déduire que f réalise une bijection de $]-2, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

c) Calculer $f^{-1}(x)$ pour x élément de I.

d) Construire les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé du plan.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

1) a) Montrer que f est dérivable et déterminer sa fonction dérivée.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle J qu'on précisera.

b) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ pour x élément de J.

c) Tracer les courbes (C) de g et (C') de g^{-1} dans un repère orthonormé.

7 On considère la fonction f définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = \dfrac{2}{\sin x}$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Calculer $g^{-1}(2)$ et $g^{-1}(4)$.

3) Construire dans un repère orthonormé les courbes de g et g^{-1}

8 Soit la fonction f définie sur [0, +∞[par $f(x) = x^5$.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque qu'on précisera.

b) Construire les courbes de f et f^{-1}.

9 Soit g la fonction définie sur [0, +∞[par $g(x) = 2\sqrt[3]{x} + 1$

a) Montrer que g est dérivable sur [0, +∞[et calculer $g'(x)$ pour x > 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x)-1}{x}$.

Interpréter le résultat obtenu.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) En déduire que g réalise une bijection de [0, +∞[sur un intervalle J que l'on précisera.

e) Calculer $g^{-1}(x)$ pour x élément de J.

f) Construire les courbes représentatives de g et g^{-1} dans un repère orthonormé du plan .

10 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

1) a) Montrer que f est dérivable sur]0,+∞[et que $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

b) Dresser alors, le tableau de variation de f sur [0,+∞[.

c) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

d) Déterminer le réel positif x tel que $f(x) = \dfrac{1}{2}$

e) Calculer f(4) et $(f^{-1})'(-\dfrac{1}{3})$.

2) On pose g(x) = f(x) - x

a) Montrer que g est une bijection de [0, +∞[sur]-∞, 1] .

b) En déduire que l'équation f(x) = x possède une solution unique α dans [0,+∞[.

c) Montrer que 0 < α < 1.

11 On considère la fonction

$$g : [0,\pi] \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \cos x$$

1) Montrer que g est une bijection.

2) Déterminer les images des réels $0, \dfrac{1}{2}, 1$ et $-\dfrac{1}{2}$ par la fonction g^{-1}.

3) Construire les courbes de g et g^{-1}.

4) Soit x un réel de [-1, 1].

a) Calculer $\cos(g^{-1}(x))$ et $\sin(g^{-1}(x))$ en fonction de x.

b) Montrer que $g^{-1}(-x) = \pi - g^{-1}(x)$.

12 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = 2x-sinx.

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que l'équation f(x) = 4 admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que $2{,}2 < \alpha < 2{,}4$.

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x .$$

a) Vérifier que g(α) = α .

b) Montrer que pour tout réel x on a

$$|g'(x)| \le \frac{1}{2}$$

c) En déduire que pour tout réel x on a :

$$|g(x) - \alpha| \le \frac{1}{2}|x - \alpha|.$$

13 On considère la fonction suivante :

$$f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle]1, +∞[vers un intervalle J que l'on précisera.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour x élément de J.

3) Tracer dans un repère orthonormé les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

4) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans $]1, +\infty[$.

5) Montrer que pour tout x de $]1, +\infty[$ on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

6) En déduire que pour tout x de $]1, +\infty[$ on a $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

14 Soit la fonction f définie pour x appartenant à l'intervalle $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 2-\sqrt{-2x+1}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, calculer f '(x) et dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire que f réalise une bijection de $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x appartenant à J.

3) Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.

4) Calculer $(f^{-1})'(1)$.

15 Soit la fonction h définie par $h(x)=\frac{x}{|x|-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h et montrer que h est une fonction impaire et préciser les asymptotes a sa courbe.

2) Dresser le tableau de variation de h.

3) Soit g la restriction de h à l'intervalle $]0, 1[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour x élément de J.

c) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour x élément de J.

d) Construire les courbes de g et g^{-1} dans un même repère orthonormé.

16 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

1) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire que l'équation g(x) = 0 possède dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et vérifier que $-1.7 < \alpha < -1.6$.

c) Déterminer le signe de g(x) dans chacun des intervalles $]-\infty, \alpha[$ et $[\alpha, +\infty[$.

2) Soit f la fonction définie su $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{1+x}{1-x^3}$

a) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Interpréter ces résultats géométriquement.

b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $f'(x)=\frac{g(x)}{(1-x^3)^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1, +\infty[$.

a) Montrer que h est une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer h(2), en déduire $(h^{-1})'(-\frac{3}{7})$.

c) Tracer les courbes de h et h^{-1} dans un même repère orthonormé du plan.

17 Soit g la fonction définie sur [-1, 0] par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 +3$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire que g admet une fonction réciproque.

c) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique x_0 appartenant à $]-1, 0[$.

d) Calculer $(g^{-1})'(0)$ en fonction de x_0.

e) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives de g et g^{-1}.

18 Soit la fonction f définie par

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

1) Etablir le tableau de variation de f.
2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition.
b) Déterminer $(f^{-1})(1)$ et $(f^{-1})(2)$.
c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et en 2 et calculer $(f^{-1})'(1)$ et $(f^{-1})'(2)$.
d) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) de f en son point d'abscisse 0.5 .
e) Donner une équation de la tangente T' à la courbe (C') de f^{-1} en son point d'abscisse 1.
3) Tracer, dans un même repère orthonormé les courbes (C) et (C') et les droites T et T'.
4) Définir f^{-1}.
5) Soit la fonction g définie pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(\sin x)$.
Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer g'(x).

19 Soit la fonction f définie sur [0, 2[par

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}.$$

1) Etablir le tableau de variation de f.
2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition

20 Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$

1) Montrer que f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.
2) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur [1, +∞[.
3) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.
b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur]1, +∞[et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x\in]1, +\infty[$.

Exercice n° 1

a) $f(x)=x^2+1 \Rightarrow f'(x)=2x>0 \quad \forall x \in]0,+\infty[$

Donc f est continue et strictement croissante sur IR_+

Par la suite f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur $f([0,+\infty[)=[f(0),\lim\limits_{+\infty} f[=[1,+\infty[=J$

b) • $f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$

• $f^{-1}(2)=x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=2 \Leftrightarrow x_0^2+1=2 \Leftrightarrow x_0^2=1$
$\Leftrightarrow x_0=1$ ou $x_0=-1$ comme $x_0 \in [0,+\infty[$

On aura $\boxed{f^{-1}(2)=1}$

• $f^{-1}(3)=x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=3 \Leftrightarrow x_0^2+1=3 \Leftrightarrow x_0^2=2$
$\Leftrightarrow x_0=\sqrt{2}$ ou $x_0=-\sqrt{2}$ comme $x_0 \in [0,+\infty[$

On aura $\boxed{f^{-1}(3)=\sqrt{2}}$

c) • f et f^{-1} ont même sens de variation donc f^{-1} est strictement croissante sur J

• f est dérivable sur $[0,+\infty[$

et $f'(x)=2x\neq 0 \ \forall x>0$

Donc f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

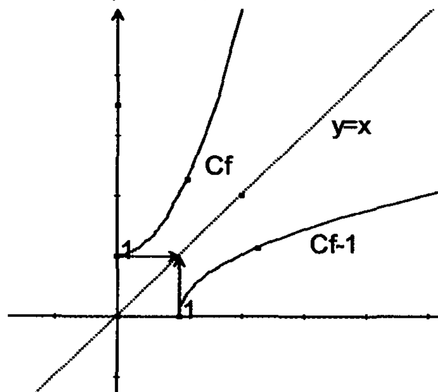
d) $x \in J$, $y \in [0,+\infty[$:

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y :

$y^2+1=x \Leftrightarrow y^2=x-1 \Leftrightarrow y=\sqrt{x-1}$ ou bien

$y=-\sqrt{x-1}$, or $y\geq 0$ d'où $\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}}$

e) Cf La courbe de f est une demi-parabole admettant une demi tgte horizontale à droite au sommet S(0,1).
La courbe de f^1 est le symétrique de Cf par rapport à la droite d'équation : y=x



Exercice n° 2

$x \in [0,+\infty[$; $g(x)=-1+\sqrt{x}$

a) pour $x>0$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$

g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$
Donc g admet une fonction réciproque g^{-1}

b) $g([0,+\infty[)=[g(0),\lim\limits_{+\infty} g[=[-1,+\infty[$

Donc g^{-1} est définie sur $J=[-1,+\infty[$

c) $x \in [-1,+\infty[$, $y \in [0,+\infty[$:

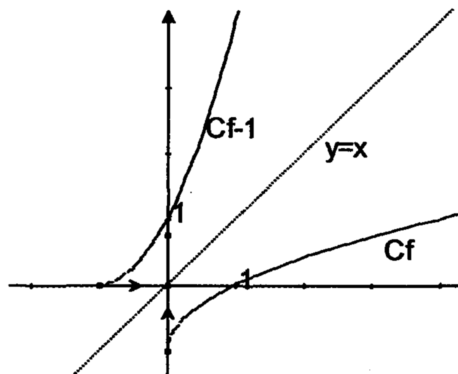
$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$, cherchons donc y :

$-1+\sqrt{y}=x \Leftrightarrow \sqrt{y}=x+1$

$\Leftrightarrow y=(1+x)^2$

alors $\boxed{g^{-1}(x)=(1+x)^2}$

d) Cg La courbe de g est une demi-parabole admettant une demi tgte verticale au point S(0,-1).
La courbe de f^1 est le symétrique de Cg par rapport à la droite d'équation : y=x (Cf^1 admet une demi- tg horizontale à droite au point S'(-1 ;0))



Remarque : g dérivable sur $]0,+\infty[$
g^{-1} dérivable sur $[-1,+\infty[$ et $(g_d^{-1})'(-1)=0$

Exercice n° 3

● $h(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $x>0$

h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $h'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0$

Donc h est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$
Par la suite h admet une fonction réciproque h^{-1}

définie sur $J=h(]0,+\infty[)$
$=\left]\lim\limits_{0^+} h, \lim\limits_{+\infty} h\right[=IR$

● $x \in IR$, $y \in]0,+\infty[$:

$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x$, cherchons y :

$y - \frac{1}{y} = x \Leftrightarrow y^2 - y.x - 1 = 0$

Résolution de l'équation : $y^2 - y.x - 1 = 0$

On a : $\Delta = x^2 + 4 > 0$

D'où

$\Leftrightarrow y = y_1 = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ou bien $y = y_2 = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$

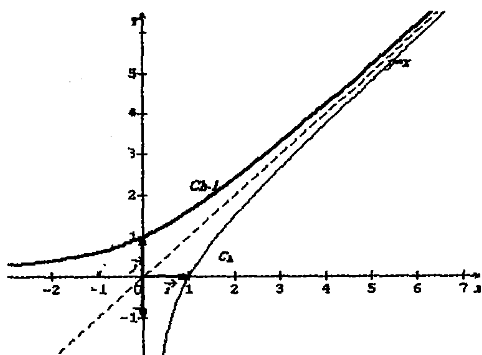
Comme $h(1) = 0$ on aura $h^{-1}(0) = 1$,
En remplacent x par 0 dans les expressions de y_1 et y_2 on trouve $y_1 = 1$

Ce qui prouve que : $\boxed{h^{-1}(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}}$

● $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{0} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$

Il résulte que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à C_h



Exercice n° 4

$f(x) = tg(x)$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

● f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$f'(x) = 1 + tg^2 x > 0$

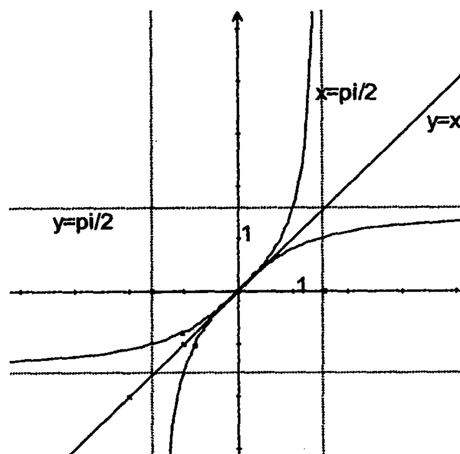
f continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc f est bijective

● $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

Donc les droites : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ sont deux asymptotes pour la courbe de f



Exercice n° 5

$f(x) = \frac{-1+2x}{6+3x}$

a) f est dérivable sur $]-2,+\infty[$ et on a :

$f'(x) = \frac{15}{(6+3x)^2} > 0$ $\boxed{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}}$

f est strictement croissante sur $]-2,+\infty[$

b) f est continue et strictement croissante sur $]-2,+\infty[$ d'où f réalise une bijection de $]-2,+\infty[$ sur l'intervalle

$I = f(]-2,+\infty[) = \left]\lim_{x\to(-2)^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$= \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$

c) $x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$, $y \in]-2,+\infty[$

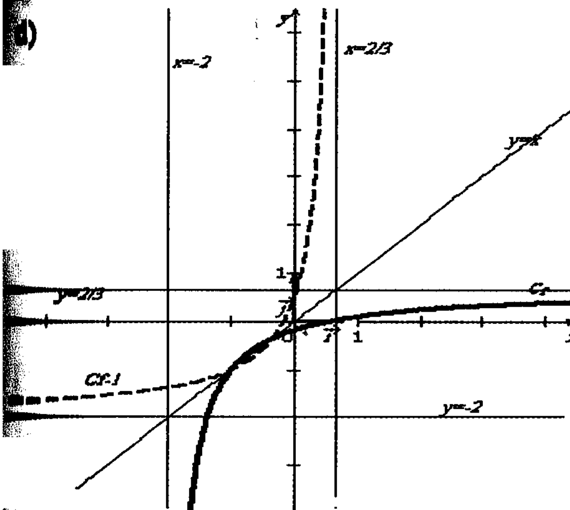
$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$, cherchons donc y :

$\frac{-1+2y}{6+3y} = x \Leftrightarrow 2y - 3xy = 1 + 6x$

$\Leftrightarrow y(2-3x) = 1 + 6x \Leftrightarrow y = \frac{1+6x}{2-3x}$

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1+6x}{2-3x}}$

d)



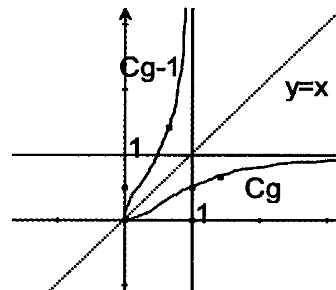
$$\frac{y^2}{1+y^2} = x \Leftrightarrow y^2 = (1+y^2).x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x + x.y^2 .$$

$\Leftrightarrow y^2(1-x) = x \Leftrightarrow y^2 = \frac{x}{1-x}$ comme y > 0

Alors $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

c) Courbe de g et sa réciproque



Exercice n° 6

$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

1 a) $x \to x^2$ est dérivable sur IR

$x \to 1+x^2$ est dérivable sur IR: et $1+x^2 > 0$

Donc f est dérivable sur IR et on a :

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^2)-2x\,x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2}$$

Conclusion $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $x \in$ IR

b) Tableau des variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	1 ↘	0	↗ 1

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

2 a) g est continue et strictement croissante sur] 0 , +∞ [d'où g réalise une bijection de] 0 , +∞ [sur g(] 0 , +∞ [ )= $]0,1[$ =J

b)) $x \in]0,1[$, y ∈] 0 , +∞ [

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$, cherchons donc y :

Exercice n° 7

$f(x) = \frac{2}{\sin x}$, $x \in]0,\pi[$

a) f est dérivable sur $]0,\pi[$ car sin(x) ≠ 0 et on a

$f'(x) = -\frac{2\cos x}{(\sin x)^2}$, le signe de $f'(x)$ est le contraire de celui de cos(x)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

$\lim_{x\to0^+} \frac{2}{\sin x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ et $\lim_{x\to\pi^-} \frac{2}{\sin x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

2 g restriction de f à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

a) g étant continue et strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ d'où g réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur g($\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$)= $]2,+\infty[$ donc g admet une fonction réciproque définie sur $]2,+\infty[$

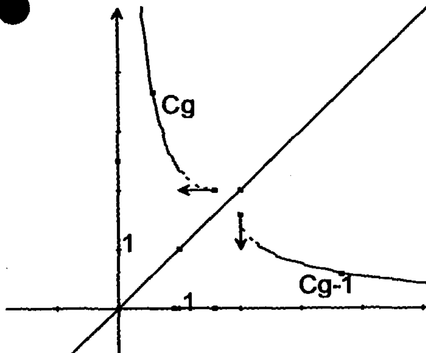
b) On a : * $g(0) = 2$ d'où $g^{-1}(2) = 0$

* posons $g^{-1}(4) = \alpha$ donc on aura $g(\alpha) = 4$

C'est-à-dire $\frac{2}{\sin\alpha} = 4$ ce qui donne

$\sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

Donc $\alpha = \frac{\pi}{3}$ finalement $\boxed{g^{-1}(4) = \frac{\pi}{3}}$



Exercice n° 8

$f(x) = x^5, x \in [0, +\infty[$

a) $f'(x) = 5x^4 > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

f est continue et strictement croissante sur IR_+

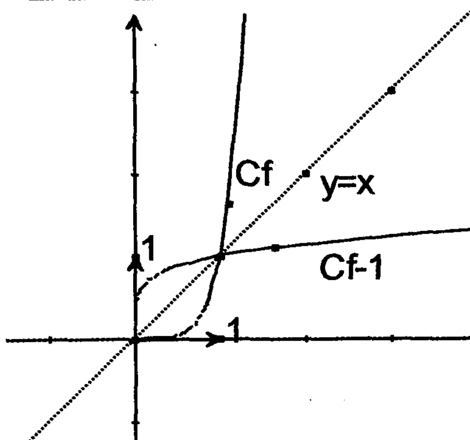
D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie

sur $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f[= [0, +\infty[$

- Expression de $f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y^5 = x \Leftrightarrow y = \sqrt[5]{x}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}}$



Exercice n° 9

$g(x) = 2\sqrt[3]{x} + 1$

a) pour $x > 0$ on a $\sqrt[3]{x}$ est dérivable donc g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On sait que : $(\sqrt[n]{x})' = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$, $x \succ 0$

(Voir Activité 3 p 69)

Donc $\forall x \succ 0 : g'(x) = 2.\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$

b) $\lim_{x\to0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{g(x)-1}{x}$

$= \lim_{x\to0^+} \frac{2\sqrt[3]{x}+1-1}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}$

$= \lim_{x\to0^+} 2.\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x\to0^+} 2.\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty$ $\boxed{\sqrt[n]{x^n} = x}$

D'ou $\lim_{x\to0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = +\infty$, par la suite g est non dérivable à droite en 0 et la courbe de g admet au point d'abscisse 0 une demi- tangente verticale dirigée vers le haut

c)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	1 ↗	$+\infty$

d) g étant continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ il résulte que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$

e) $x \geq 1$ et $y \geq 0$:

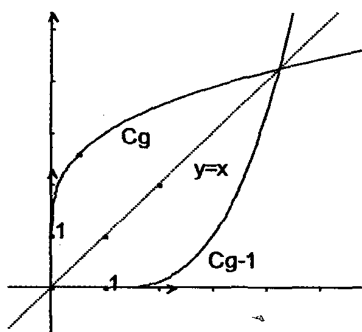
$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{y} + 1 = x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{y} = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = \frac{x-1}{2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{y})^3 = (\frac{x-1}{2})^3 \Leftrightarrow y = (\frac{x-1}{2})^3$

D'où $\boxed{g^{-1}(x) = (\frac{x-1}{2})^3}$

f) courbe de g et g^{-1}



Exercice n° 10

1) a) $x \to 1-\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x \to 1+\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $1+\sqrt{x} \neq 0 \quad \forall x \succ 0$: donc f est dérivable

sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=\frac{(1-\sqrt{x})'.(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x}).(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}.(1+\sqrt{x})^2}$$

b)

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	1 $\searrow$ -1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)}{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)}=-1$$

c) f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ d'où elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=]-1,1]$

d) $f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-2\sqrt{x}$
$=1+\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 1=3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{3}$ donc $\boxed{x=\frac{1}{9}}$

e) • $f(4)=\frac{1-\sqrt{4}}{1+\sqrt{4}}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$

• $(f^{-1})'(-\frac{1}{3})=\frac{1}{f'\left[(f^{-1})(-\frac{1}{3})\right]}=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{-\frac{1}{18}}$
$=-18$

D'où $\boxed{(f^{-1})'(-\frac{1}{3})=-18.}$

2) a) $g'(x)=f'(x)-1<0,\ \forall x\geq 0$

g étant continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ il résulte que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty}g(x),g(0)\right]$

Or : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=-1-\infty=-\infty$

Et $g(0)=f(0)-0=1$

Donc $g([0,+\infty[)=]-\infty,1]$

Coclusion : g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$

b) $f(x)=x \Leftrightarrow g(x)=0$ et on a $0 \in]-\infty,1]$ il résulte que 0 admet un unique antécédent α par g dans $[0,+\infty[$

c) $\begin{cases} g(0)=1 \\ g(1)=f(1)-1=-1 \end{cases} \Rightarrow g(0).g(1)\prec 0$

<u>Conclusion</u> : $0<\alpha<1$

Exercice n° 11

1) $g'(x)=-\sin(x)<0\ \forall x \in]0,\pi[\Rightarrow$
g est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc g est une bijection de $[0,\pi]$ sur $g([0,\pi])=[-1,1]$.

2) * $g^{-1}(0)=x_0 \Leftrightarrow g(x_0)=0 \Leftrightarrow \cos x_0=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{\pi}{2}$

Donc $\boxed{g^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}}$

*De même on a : $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ d'où $\boxed{g^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}}$

●

● $x \in [-1, 1]$

a) $\cos[g^{-1}(x)] = g(g^{-1}(x)) = x$

$\sin[g^{-1}(x)] = \sqrt{1-\cos^2(g^{-1}(x))} = \sqrt{1-x^2}$

b) On sait que : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ d'où

$$\cos(\pi - g^{-1}(x)) = -\cos(g^{-1}(x))$$

$$\cos(\pi - g^{-1}(x)) = -x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$g^{-1}[\cos(\pi - g^{-1}(x))] = g^{-1}(-x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{g^{-1}og}_{Id}\ (\pi - g^{-1}(x)) = g^{-1}(-x)$$

Finalement : $\boxed{\pi - g^{-1}(x) = g^{-1}(-x).}$

Exercice n° 12

$f(x) = 2x - \sin x$, $x \in$ IR

● f est dérivable sur IR et $f'(x) = 2 - \cos x > 0$ car $\cos x \leq 1$ donc f strictement croissante sur IR

* f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur f(IR)

Or on sait que $\forall x \in IR : -1 \leq \sin x \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 + 2x \leq 2x - \sin x \leq 1 + 2x$

Utilisant le théorème de comparaison :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$ Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x + 1 = -\infty$ Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

D'où $f(\text{IR}) = \left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= \text{IR}$

● a) f est une bijection de IR sur IR, 4 ∈ IR donc l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans IR

b) $f(2,2) = 3,59 < 4$ et $f(2,4) = 4,12 > 4$

Donc $\boxed{2,2 \leq \alpha \leq 2,4.}$

● $g(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x$

a) $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{2}\sin\alpha$ (*)

On sait que $f(\alpha) = 4$ donc $2\alpha - \sin\alpha = 4$ et par la suite

$\sin\alpha = 2\alpha - 4$

Remplacent cette expression de sin α dans l'égalité (*)

On aura : $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{2}(2\alpha - 4) = 2 + \alpha - 2 = \alpha$

D'où $\boxed{g(\alpha) = \alpha.}$

b) $g'(x) = \frac{1}{2}\cos x$

Or : $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\cos x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\cos x\right| \leq \frac{1}{2}$

Donc $\forall x \in IR$, $\boxed{|g'(x)| \leq \frac{1}{2}}$

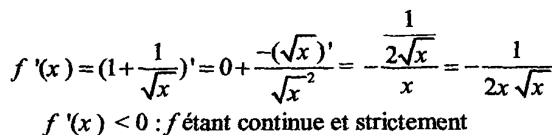
c) g est dérivable sur IR , $x \in IR$, $\alpha \in IR$ et $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a :

$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\Leftrightarrow |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice n° 13

● f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et



$$f'(x) = (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})' = 0 + \frac{-(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x) < 0$: f étant continue et strictement

décroissante sur $]1,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur l'intervalle $J=f(]1,+\infty[)=]1,2[$

● $x\in]1,2[$, $y\in]1,+\infty[$

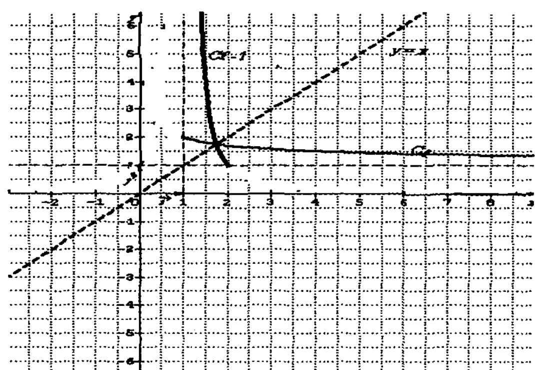
$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y

$$f(y)=1+\frac{1}{\sqrt{y}}=x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}=x-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow y=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2$$

Conclusion : $\boxed{f^{-1}(x)=\frac{1}{(x-1)^2}}$; $x\in]1,2[$

●



● Posons $g(x)=f(x)-x$

$\forall x>1$: $g'(x)=f'(x)-1<0$ car $f'(x)<0$

Donc g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et $g(]1,+\infty[)=]-\infty,1[$

Comme $0\in]-\infty,1[$ alors l'équation $g(x)=0$ (et par la suite l'équation $f(x)=x$) admet une unique solution α dans l'intervalle $]1,+\infty[$

● $\forall x\geq 1$ on a : $2x\sqrt{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2x\sqrt{x}}\leq\frac{1}{2}$

D'où $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\geq-\frac{1}{2}$

Ce qui donne : $-\frac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0\leq\frac{1}{2}$

Finalement : $\forall x\geq 1$ on a $\boxed{|f'(x)|\leq\frac{1}{2}}$

● f est dérivable sur $]1,+\infty[$, $x\in]1,+\infty[$

$\alpha\in]1,+\infty[$ et $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

Donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a : $|f(x)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$

On a aussi : $f(\alpha)=\alpha$ d'où $|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$

Exercice n° 14

$x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$; $f(x)=2-\sqrt{-2x+1}$

● a) La fonction : $x\mapsto-2x+1$ est dérivable est strictement positive sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

Donc f est dérivable sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ (Rque : f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$)

$$f'(x)=0-\frac{(-2x+1)'}{2\sqrt{-2x+1}}=-\frac{-2}{2\sqrt{-2x+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-2x+1}}>0$$

Tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		+	‖
$f(x)$	$-\infty$	↗	2

b) f est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$

Sur $J=f\left(\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\right)=]-\infty,2]$

● $y\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$, $x\in]-\infty,2]$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y

$$f(y)=2-\sqrt{-2y+1}=x \Leftrightarrow \sqrt{-2y+1}=2-x$$

$$\Leftrightarrow -2y+1=(2-x)^2 \Leftrightarrow y=\frac{1-(2-x)^2}{2}$$

$$=\frac{1-(4-4x+x^2)}{2}$$

Conclusion : $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(-x^2+4x-3)$, $x\in]-\infty,2]$

● on a $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(-x^2+4x-3)$, $x\in]-\infty,2]$ donc f^{-1} est dérivable sur $]-\infty;2]$ (fonction polynôme)

Conclusion : f^{-1} est dérivable sur $]-\infty,2]$

● $$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'[(f^{-1})(1)]}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{1}=1$$

(Rque : On peut aussi calculer $(f^{-1})'(x)=-x+2$)

Exercice n° 15

● • a) h est définie si et seulement si

$|x|-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ ou $x \neq -1$

Donc : $Dh = IR \setminus \{-1,1\}$

• pour tt $x \in Dh$, on a $-x \in Dh$ et :

$$h(-x) = \frac{-x}{|-x|-1} = -\frac{x}{|x|-1} = -h(x)$$

D'où h est une fonction impaire ce qui prouve que l'origine du repère est un centre de symétrie pour la courbe de la fonction h.

• $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ (Pour $x > 0$ on a $|x| = x$)

Donc la droite d'équation y = 1 est une asymptote horizontale pour la courbe de h au voisinage de $+\infty$

• $\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\underbrace{|x|}_{=x>0} - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Donc la droite d'équation x = 1 est une asymptote verticale pour la courbe de h

**Par raison de symétrie les droites d'équations x = –1 y = – 1 sont deux asymptotes à C_h

● Etudions h sur $D_E = D_h \cap [\,0, +\infty\,[$

$$D_E = [\,0, 1\,[\cup]\,1, +\infty\,[$$

On a pour tout $x \in D_E$: $h(x) = \frac{x}{x-1}$ car $|x| = x$

h est dérivable sur D_E et $h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \prec 0$

x	0		1	$+\infty$
$h'(x)$				
$h(x)$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 1	

● $g(x) = h(x)$ pour $x \in]\,0, 1[$

a) g étant continue et strictement décroissante sur] 0, 1[

donc g réalise une bijection de] 0, 1[sur J= $]-\infty, 0[$

b) $y \in]\,0, 1\,[$, $x \in]-\infty, 0[$

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$, cherchons donc y

$g(y) = \frac{y}{y-1} = x \Leftrightarrow y = xy - x$

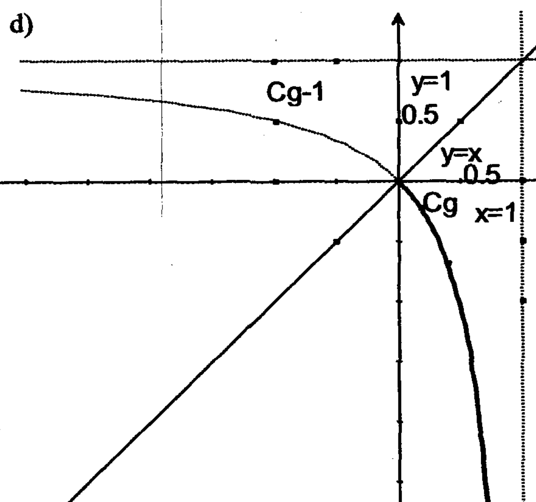
$\Leftrightarrow y(x-1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}$.

D'où $\boxed{g^{-1}(x) = g(x) = \frac{x}{x-1} ; x \in]-\infty; 0[}$

c) g est dérivable et $g'(x) \neq 0$ sur] 0, 1 [donc g^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et on a

$$(g^{-1})'(x) = g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

d)



Exercice n° 16

● a) g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR et $g'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

$g'(x) = 0$ signifie $x = 0$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$

b) • g est continue et strictement croissante sur $[\,0, +\infty[$ et $g([\,0, +\infty\,[\,) = [\,1, +\infty\,[$

Comme $0 \notin [\,1, +\infty\,[$ alors l'équation

$g(x) = 0$ n'admet pas des solutions dans $[\,0, +\infty\,[$

De même l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas des solutions Dans l'intervalle $[-1, 0]$

- g est continue et strictement croissante sur

$]-\infty,-1[$ et $g(]-\infty,-1[)=\ ]-\infty,2[$

Comme $0 \in\ ]-\infty,2[$ alors l'équation

$g(x)=0$ admet

une solution unique α dans $]-\infty,-1[$

Conclusion : L'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans IR

- $g(-1,7)\simeq -0,156$ et $g(-1,6)\simeq 0,488$

$g(-1,7)\times g(-1,6)<0$ donc : $-1,7<\alpha<-1,6$

c)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de g(x)	−	0	+

2) a) $x \in IR\setminus\{1\}$; $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x^3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x}{x^3}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{x}{x^3}=0$

Comme :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x^3$	+	0	−

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1+x}{1-x^3}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1+x}{1-x^3}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$

Interprétation : les droites $y=0$ et $x=1$ sont deux asymptotes pour la courbe de f

b) $f'(x)=\dfrac{(1+x)'(1-x^3)-(1+x)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2}$

$f'(x)=\dfrac{1-x^3-(1+x).(-3x^2)}{(1-x^3)^2}=\dfrac{2x^3+3x^2+1}{(1-x^3)^2}$

Donc $\forall x\in IR\setminus\{1\}$ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1-x^3)^2}$

c) Le signe de $f'(x)$ et celui de $g(x)$ (voir 2 – a)

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		−		+	‖	+	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

- h la restriction de f à l'intervalle $]1,+\infty[$

a) h est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$

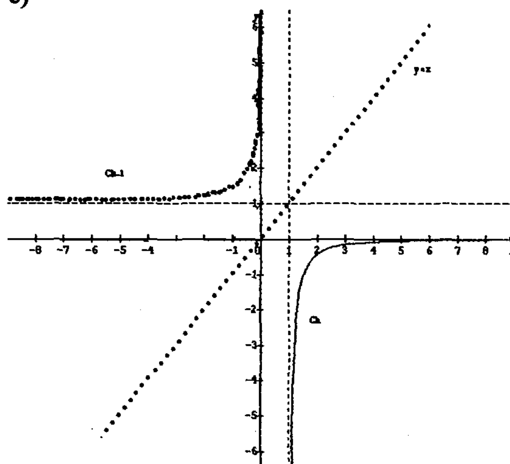
d'où h réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]-\infty,0[$

b) $h(2)=\dfrac{3}{1-8}=-\dfrac{3}{7}$

- $(h^{-1})'(-\dfrac{3}{7})=\dfrac{1}{h'\left[(h^{-1})(-\dfrac{3}{7})\right]}=\dfrac{1}{h'(2)}=\dfrac{1}{\dfrac{29}{(-7)^2}}$

D'où $(h^{-1})'(-\dfrac{3}{7})=\dfrac{49}{29}$

c)



Exercice n° 17

$\forall\ x\in[-1,0]$, $g(x)=2x^3-3x^2+3$

a) $\forall\ x\in[-1,0]$, $g'(x)=6x^2-6x\succ0$

x	-1	0
$g'(x)$	+	
$g(x)$	-2 ↗	3

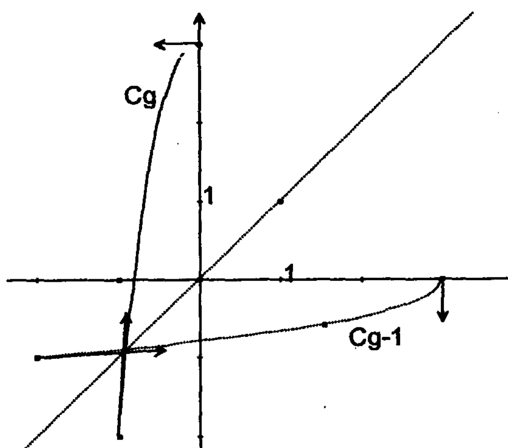
b) g est continue et strictement croissante sur $[-1,0]$ d'où g réalise une bijection de $[-1,0]$ sur $[-2,3]$ donc admet une fonction réciproque définie sur[-2,3].

c) $g(]-1,0[)=]-2,3[$, comme $0\in\ ]-2,3[$ et g est

une bijection alors L'équation g (x) = 0 admet une unique solution $x_0 \in]-1,0[$

d) $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{g'\left[(g^{-1})(0)\right]} = \dfrac{1}{g'(x_0)} = \dfrac{1}{6x_0^2 - 6x_0}$

e)



Exercice n° 18

● $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ (à rectefier)

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	−	0	+		+
1 − x	+		+	0	−
$\dfrac{x}{1-x}$	−	0	+	‖	−

D'après le tableau de signe : Df = [0 , 1[

f est dérivable sur] 0 , 1[et on a :

$$f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}} = \dfrac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}} > 0$$

• T de variation de f

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = \sqrt{\dfrac{1}{0^+}} = +\infty$$

● a) f est continue et strictement croissante sur [0 , 1[

d'où f réalise une bijection de[0 , 1[sur [0 , +∞ [

d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} definie sur [0 , +∞ [

b) • $(f^{-1})(1) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}} = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{(f^{-1})(1) = \dfrac{1}{2}}$

• $(f^{-1})(2) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}} = 2 \Leftrightarrow 5\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{4}{5}$ donc $\boxed{(f^{-1})(2) = \dfrac{4}{5}}$

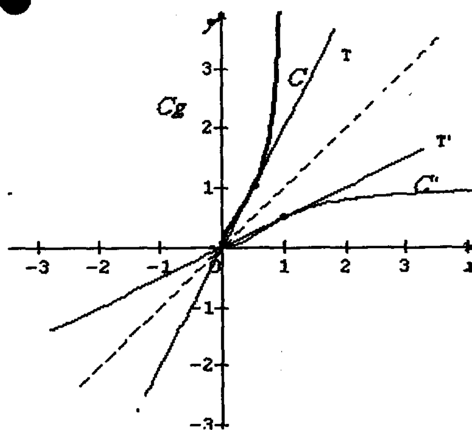
c) * On a $(f^{-1})(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(\dfrac{1}{2}) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'\left[(f^{-1})(1)\right]} = \dfrac{1}{f'(\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{2}$

* On a $(f^{-1})(2) = \dfrac{4}{5}$ et $f'(\dfrac{4}{5}) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 2 et $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'\left[(f^{-1})(2)\right]} = \dfrac{1}{f'(\frac{4}{5})} = \dfrac{4}{25}$

d) T : $y = f'(0.5)(x - 0.5) + f(0.5) = 2x$

e) T' : $y = (f^{-1})'(1)(x-1) + (f^{-1})(1) = \dfrac{1}{2}x$

●



4) $y \in [0, 1[$, $x \in [0, +\infty[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$, cherchons donc y

$f(y) = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}} = x \Leftrightarrow \dfrac{y}{1-y} = x^2$

$\Leftrightarrow y = x^2 - yx^2 \Leftrightarrow y(1+x^2) = x^2$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

<u>Conclusion</u> : $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in[0,+\infty[$

5) • posons u(x) = sin x

$x\to\sin x=U(x)$ est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$U(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[)=]0,1[$

$x\to f(x)$ est dérivable sur $U(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[)=]0,1[$

Donc g(x) est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

• $g'(x)=(f\circ U(x))'=U'(x)\cdot f'(U(x))$

$$=\cos x\cdot\dfrac{1}{2(1-\sin x)^2\sqrt{\dfrac{\sin x}{1-\sin x}}}$$

Donc $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\boxed{g'(x)=\dfrac{\cos x}{2(1-\sin x)^2\sqrt{\dfrac{\sin x}{1-\sin x}}}}$

Exercice n° 19

● f est dérivable sur]0 , 2[et $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{x^3}{2-x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{2-x}}}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{3x^2(2-x)+x^3}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{2-x}}}=\dfrac{6x^2-3x^3+x^3}{2(2-x)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{2-x}}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2x^2(3-x)}{2(2-x)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{2-x}}}$$

Or $x\in[0,2[$ donc $(3-x)>0$ d'où $f'(x)\succ0$

x	0	2
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$	

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\dfrac{x^3}{2-x}=\dfrac{8}{\underset{2-x\succ0}{0^+}}=+\infty$$

●

f est continue et strictement croissante sur [0 , 2 [
Donc f réalise une bijection de [0,2[sur L'intervalle
$J=\left[f(0),\lim_{x\to2}f(x)\right[=[0,+\infty[$ D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$

Exercice n° 20

● la fonction $x\to\cos x$ est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Et $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a : $\cos x>0$ donc f est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

● On a $f'(x)=-\dfrac{(\sqrt{\cos x})'}{\sqrt{\cos x}^2}=-\dfrac{\dfrac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}$

$$f'(x)=-\dfrac{\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}=\dfrac{\sin x}{2\cos x\sqrt{\cos x}}$$

Comme pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos x>0$ et $\sin x>0$

On aura $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)\succ0$

* f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

D'où f réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[1,+\infty[$

Car $f\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)\right[$ et on a

$f(0)=1$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

● a) $f^{-1}(1)=0$ et $f'(0)=0$ donc f^{-1} non dérivable à droite en 1

b) * f est dérivable, $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)\neq0$

donc f^{-1} est dérivable sur $f(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[)=]1,+\infty[$

$$*(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'[(f^{-1})(x)]}$$

$$=\dfrac{1}{\dfrac{\sin(f^{-1}(x))}{2\cos(f^{-1}(x)).\sqrt{\cos(f^{-1}(x))}}}\quad\textbf{(1)}$$

Or $f\circ f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos(f^{-1}(x))}}=x\Rightarrow\cos(f^{-1}(x))=\dfrac{1}{x^2}$

Aussi on a :

$$\sin(f^{-1}(x))=\sqrt{1-\cos^2(f^{-1}(x))}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x^4}}$$

$$=\sqrt{\dfrac{1-x^4}{x^4}}=\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{x^4}}\;\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$$

Donc $\forall x\in]1,+\infty[$ on a : $\sin(f^{-1}(x))=\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$

Remplacent maintenant $\cos(f^{-1}(x))$ et $\sin(f^{-1}(x))$ par

Leurs expressions en fonction de x dans l'égalité **(1)** :

On trouve :

$$(f^{-1})'(x)=\frac{2.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2}}=\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

Conclusion :

$$\forall x\in\,]1,+\infty[\,,\ \boxed{(f^{-1})'(x)=\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}}$$

RÉSUMÉ DU COURS

Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique f et tracer convenablement sa courbe représentative C, il importe d'étudier les propriétés de f telles que **parité, variation, branches infinies,** etc.,. On disposera, également, de moyens tels que : **changement de repère, utilisation de transformations planes ou une transformation d'écriture conduisant à un changement de repère** et permettant d'alléger le procédé de construction de la courbe C.

Plan d'étude : En général, on adopte la démarche suivante (lorsque l'énoncé de l'exercice ne suggère aucun autre plan d'étude) :

1ère étape : Détermination de l'ensemble D sur lequel la fonction f est définie.

2ème étape : Réduction de domaine d'étude :

- si f est paire ou impaire le domaine d'étude de f est $D_e = D \cap \mathbb{R}_+$.
- si f est périodique de période T, il suffit d'étudier f sur un domaine du type $D_e = D \cap [a, a+T]$

3ème étape : Calcul des limites de f aux bornes de son ensemble de définition (ou d'étude).

4ème étape : Etude du sens de variation de f et consignation des résultats dans un tableau de variations.

5ème étape : Etude du comportement asymptotique de la courbe C.

6ème étape : Construction de quelques points de la courbe C ainsi que les asymptotes éventuelles ou les éléments de symétrie de C et les tangentes aux points particuliers etc.

7ème étape : Construction de C dans un repère convenablement choisi.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[\alpha, +\infty[$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$ ($b \in \mathbb{R}$)
alors la droite D : y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$. (Si b = $+\infty$ ou $-\infty$ la courbe possède une branche parabolique de direction la droite D : y = ax au voisinage de $+\infty$).
Le résultat est vrai pour une fonction f définie sur un intervalle du type $]-\infty, \alpha]$ et x tendant vers $-\infty$.

* Soit f une fonction définie sur D et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel et Δ la droite d'équation x = a.
La droite Δ est un axe de symétrie de la courbe C si et seulement si pour tout x de D, $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.

* Soit f une fonction définie sur D et C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit W(a,b) un point du plan. Le point W est un centre de symétrie de la courbe C, si et seulement si pour tout x de D, $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

1) Utiliser un logiciel pour :
- tracer un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et placer le point A(0, 4) dans ce repère.
- tracer le cercle (C) de diamètre [OA] et marquer un point N sur (C) distinct de 0.
- tracer la tangente à (C) en A. Cette tangente coupe la droite (ON) en un point P.
- marquer le point M intersection de la parallèle à (AP) passant par N et de la perpendiculaire à (AP) en P.
- conjecturer l'ensemble des points M , lorsque N varie sur le cercle (C).

2) On désigne par (x,y) les coordonnées du point M.

a) Montrer que $y = \dfrac{64}{x^2+16}$.

b) Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{64}{x^2+16}$ et représenter graphiquement l'ensemble des points M.

Activité 2

1) Utiliser un logiciel de géométrie pour :
- construire un triangle ABC isocèle de sommet principal A, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.
- placer H le pied de la hauteur issue de A.
- marquer α l'angle $H\hat{O}C$ (prendre $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$).
- calculer l'aire du triangle ABC.
- faire varier α (en déplaçant par exemple le point C sur le cercle) pour obtenir un tri angle ABC ayant la plus grande aire possible S.
- donner une valeur approchée de S et la valeur de α correspondante.

2) a) Calculer BC et AH en fonction de α .
   b) En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de α .

3) a) Utiliser le repère orthonormé du logiciel pour représenter graphiquement

la fonction $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sin x(1+\cos x)$.

b) Lire sur le graphique une valeur approchée de x pour laquelle f(x) est maximal.

4) a) Montrer que f'(x) = (2cosx - 1)(cosx + 1), x un réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Déterminer la valeur de α pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.

d) Préciser ce maximum et la nature du triangle ABC.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 - x + 1$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 2$

On désigne par C_f et C_g leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de chacune des fonctions f et g.

2) a) Etudier la position relative de C_f et C_g.

b) Construire les courbe C_f et C_g.

2 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Déterminer les abscisses des points d'intersection de C avec l'axe de abscisses $(O, \vec{i})$.

c) Etudier les branches infinies de C.

d) Tracer C.

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

a) Etudier les variations de f .

b) Préciser les branches infinies de C_f.

c) Construire C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier la parité de f, en déduire que O est un centre de symétrie pour C_f.

2) Etudier f et dresser son tableau de variations.

3) a) Déterminer les cordonnées des points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses.

b) Préciser les branches infinies de C_f.

4) a) Déterminer une équation de la tangente T à C_f en O.

b) Etudier la position de C_f par rapport à T.

c) Tracer T et C_f.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions et donner un encadrement à l'unité prés pour chacune de ces solutions.

3) a) Préciser les branches infinies de C_f.

b) Construire C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x^2-4x) - 1$

2) Montrer que le point W(2 ; -1) est un centre de symétrie pour C_f.

3) a) Déterminer l'équation Y = F(X) de C_f dans le repère $(W, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Etudier la fonction F.

c) Construire C_f.

7 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x + 3}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Préciser le domaine de définition D_f de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2) En déduire que C_f admet trois asymptotes que l'on précisera.
3) Etablir le tableau de variation de f.
4) Tracer C_f.
5) Montrer que C_f admet un axe de symétrie que l'on précisera.

6) Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{4x^2-9x+9}{x^2-4x+3}$.

a) Montrer que g(x) = f(x) + k où k est une constante réelle que l'on précisera.
b) En déduire que la courbe C_g représentative de g s'obtient de celle de f par une transformation géométrique simple que l'on précisera.
c) Tracer C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
d) Utiliser C_g pour dresser le tableau de variation de g

8 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{|x+1|-|x-1|}.$$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
b) Montrer que f est impaire.
2) Déterminer un prolongement par continuité de f en 0. On notera g ce prolongement.
3)a) Etudier la dérivabilité de g en 0.
b) Dresser le tableau de variations de g.
4) a) Préciser les branches infinies de la courbe représentative C de g.
b) Tracer C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

9 Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x-1}{x+1}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$
b) En déduire les équations des asymptotes à C_f.
2) Etudier les variations de f et tracer C_f.

10 On considère la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^4-1}{x^2}$$

1) a) Préciser l'ensemble de définition de f.
b) Dresser le tableau de variations de f.
2) a) Préciser les branches infinies de la courbe représentative C de f.
b) Tracer la parabole P : $y = x^2$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
c) Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
d) Tracer C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

11 Soit f la fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3} & \text{si } x \in \left]-\infty, 2\right[\\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si } x \in \left[2, +\infty\right[\end{cases}$$

Et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
1) a) Préciser le domaine de définition de f et étudier la continuité de f en 2.
b) Etudier la dérivabilité à gauche et à droite de f en 2. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \left[2, +\infty\right[, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

b) En déduire que C_f admet une asymptote oblique D au voisinage de $+\infty$ et étudier la position relative de C_f et D.
c) Préciser la branche infinie de C_f au voisinage de puis tracer C_f et D.

12 Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Préciser l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D.

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que

$$f(x) = ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

b) En déduire les équations des asymptotes à C_f.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Tracer C_f.

4) Discuter, graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de points d'intersection de C_f et la droite D : y = x + m.

13 Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer D_f et étudier la continuité de f sur D_f.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en (-1) et à droite en 3.Interpréter graphiquement les résultats.

c) Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

2) a) Montrer que :

$$\forall x \in D_f - \{-1;3\}, \text{ on a } f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Vérifier que :

$$\forall x \in D_f ; f(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 4}$$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x - 1] = 0$

et que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 1] = 0$.

c) En déduire que la courbe C admet deux asymptotes obliques D et D'.

4) Tracer D, D' et C.

14 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 - 1}$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f

2) a) Montrer que D : x = 2 est un axe de symétrie pour C.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que la droite Δ_1 d'équation y = x - 2 est une asymptote à C au voisinage de +∞ et que la droite Δ_2 d'équation y = -x -2 en est une asymptote à C au voisinage de -∞.

3) Tracer D, Δ_1, Δ_2 et C.

15 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 1 - \sqrt{x^2 + x}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que la droite $D : x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe C.

c) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle [0, +∞[.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Déterminer f'(x) pour tout x ∈]0, +∞[.

c) Dresser le tableau de variation de f sur]0, +∞[.

3) Montrer que la droite $D : y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote à C en +∞ .

b) Etudier la position de C par rapport à D.

c) Déterminer l'équation de l'asymptote D' à C au voisinage de -∞ .

4) Tracer D, D' et C_f.

5) Déduire de C_f la courbe représentative C_g de la fonction $g(x) = 1 - \sqrt{x^2 + |x|}$ et construire C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

16 A chaque entier naturel n on considère la fonction f_n définie par

$f_n(x) = x^n\sqrt{x-1}$

1) Déterminer le domaine de définition de f_n.
2) Donner, pour $n \geq 1$, le tableau de variation de la fonction f_n.
3) Représenter dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan les fonctions f_0, f_1 et f_2.

17 Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$

1) Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2) a) Calculer f '(x) et résoudre dans l' intervalle $[0, \pi]$ l' équation f '(x)= 0 .
b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
3) Représenter la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
4) Utiliser la courbe obtenue, pour donner selon la valeur du paramètre réel k, le nombre de solutions de l'équation f(x) = k dans $[0, 2\pi]$.

18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = sin(2x) - 2sin x.
1) Etudier la parité de f.
2) Quelle est la période de f ?
3) Compléter l'étude de f et représenter la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \cos^2 x$.
1) Montrer que f est 2π -périodique.
2) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3) Etudier et représenter graphiquement la restriction g de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4) Tracer la courbe de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

20 Soit la fonction

$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \operatorname{tg}x - x$

1) Etudier les variations de g et déduire le signe de g(x) pour x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x\sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
3) Soit h la restriction de f à $]2, +\infty[$.
a) Etudier le sens de variation de h.
b) Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
c) Montrer que h est une bijection de $]2, +\infty[$ sur un intervalle J.

21 Soit la fonction

$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}x}$

1) Etudier f et tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
2) Montrer que f est une bijection.
3) On pose $g = f^{-1}$.
a) Etudier la dérivabilité de g et déterminer sa fonction dérivée.
b) Calculer g(0) et g(1) et tracer C_g avec C_f.
c) Montrer que :

$\forall \in \left]0, +\infty\right[, \; g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

4) Soit $h : \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}, \; h(x) = g(\frac{1}{\cos(\pi x)})$

a) Montrer que h est dérivable et donner son tableau de variation.
b) Montrer que h est prolongeable par continuité sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = -2cos² x + 2cos x + 1.
1) a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\sin x(2\cos x - 1)$$
b) Résoudre, dans [0, π], l'équation : 2sin x(2cos x - 1) = 0
c) Dresser le tableau de variation de la restriction de f à l'intervalle [0, π] .
d) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle [0, π] .
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on précisera.
b) Déterminer le domaine D de dérivabilité de g^{-1}.
c) Soit $t \in J$, calculer $\left(\cos(g^{-1}(t))\right)$ et $\left(\sin(g^{-1}(t))\right)$ en fonction de t, en déduire $\left(g^{-1}\right)'(t)$ pour $t \in D$

23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$
1) a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\},\ f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$$
b) Calculer f '(x) et f ''(x).
c) En déduire que f ' est strictement décroissante et déterminer l'image de [-1, 1] par f '.
d) Dresser le tableau de variation de f
e) Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \le \frac{2}{3}$.
f) En déduire que .
$$\forall x, y \in [0, 1],\ |f(x) - f(y)| \le \frac{2}{3}|x - y|$$
2) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(t) = \frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}$$
a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(\pi - t) = g(t)$
b) Expliquer comment l'étude et la représentation graphique de la restriction de g à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de g.
c) Prouver que g'(t) = f'(sin t) x cos t .
d) Montrer que l'équation g'(t) = 0 admet une solution unique $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
e) Calculer la valeur exacte de g(α).
f) Construire la courbe de la restriction de g à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans un repère orthonormé convenablement choisi.
4) a) Résoudre graphiquement l'équation g(t) = t.
b) Montrer que l'équation g(t) - t = 0 admet une solution unique t_0 appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
5) Soit la suite réelle (u_n) définie sur N par
$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1-\sin^2(u_n)}{2+\sin(u_n)}$$
a) Montrer que $|u_{n+1} - t_0| \le \frac{2}{3}|u_n - t_0|$.
b) Montrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - t_0| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - t_0|$$
c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

24 Etudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes dans un repère du plan:
$f(x) = \sin^2 x - \sin x$ et $g(x) = \cos(3x)\cos^2 x$.

25 1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

a) Vérifier que pour tout réel x on a :

$$g'(x) = \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

b) Etudier les variations de g et en déduire que pour tout réel x : $g(x) > 0$.
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a- Vérifier que pour tout réel x on a :
$f'(x) = g(x)$.
b- Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c- Dresser le tableau de variation de f.
3) a- Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
b- Ecrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en O et étudier la position de T par rapport à $\mathcal{C}$.
c- Tracer $\mathcal{C}$,T et Δ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on placera les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses -1 et 1).
4) a- Vérifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
b- Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2})$ [f^{-1} étant la fonction réciproque de f].
c- Tracer $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(D'après Bac tunisien 2004)

Exercice n° 1

$f(x)=x^2-x+1$; $g(x)=-x^2-2x+2$

● – Etudions la fonction f

Pour tout $x \in IR$ on a : $f'(x)=2x-1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

- Etudions la fonction g

Pour tout $x \in IR$ on a : $g'(x)=-2x-2$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$

● a) $f(x)-g(x)=(x^2-x+1)-(-x^2-2x+2)$
$=2x^2+x-1$

Etudions le signe du trinôme $2x^2+2x-1$ en effet :

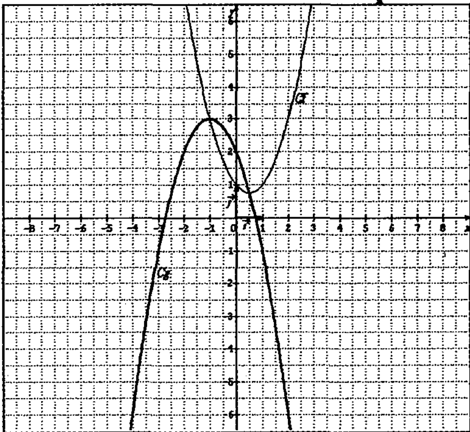
$2x^2+x-1=0$; on a : $a-b+c=0$

Donc $x'=-1$ et $x''=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
position	Cf/Cg	$(-1,3)$	Cg/Cf	$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$	Cf/Cg	

b/ C_f et C_g sont deux paraboles

4 Tecnique



Exercice n° 2 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2$

a) Pour tout $x \in IR$ on a : $f'(x)=x^3-4x=x(x^2-4)$

- Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- Tableau des variations de f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{1}{4}x^4=+\infty$

(On pourra remarquer que f est paire et on étudie f sur l'intervalle $[0,+\infty[$)

b) $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-2x^2=x^2(\frac{1}{4}x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow x^2=0$ ou $x^2=8 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\pm2\sqrt{2}$

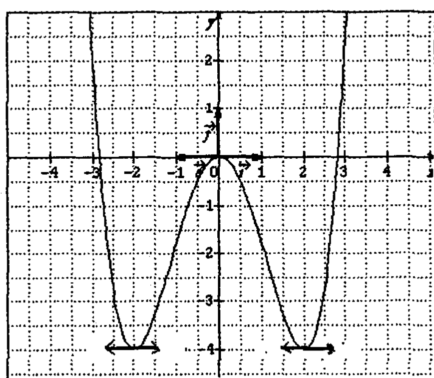
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4x}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4x}=-\infty$

Donc Cf admet deux B I P de direction (yy') au

Voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

d)



Exercice n° 3 f(x)=x³-4x²+3x+1

a) Pour tout $x \in IR$ on a : $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$

$3x^2 - 8x + 3 = 0; \Delta = b^2 - 4ac = 28 \succ 0$

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+2\sqrt{7}}{6} = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-2\sqrt{7}}{6} = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$f(\frac{4+\sqrt{7}}{3}) = f(2.21) \simeq -1.11$

$f(\frac{4-\sqrt{7}}{3}) = f(0.45) \simeq 2.44$

x	$-\infty$		$\frac{4+\sqrt{7}}{3}$		$\frac{4-\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2.44	↘	-1.11	↗	$+\infty$

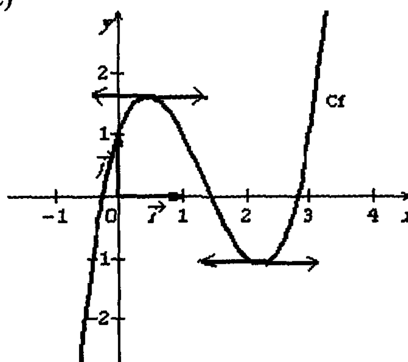
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = -\infty$

Donc Cf admet deux B I P de direction (yy') au

Voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

c)



Exercice n° 4 f(x)=2x³-6x

● $x \in IR$, $-x \in IR$

$f(-x) = 2(-x)^3 - 6(-x) = -2x^3 + 6x = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire et par suite le point O origine du repère est un centre de symétrie pour la courbe de f

● On étudie f sur IR_+

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	- 4	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

3) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x^2 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = \sqrt{3} \; ou \; x = -\sqrt{3}$

Donc : $Cf \cap (O,\vec{i}) = \{O; (\sqrt{3},0); (-\sqrt{3},0)\}$

b) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{2x^3}{x} = +\infty$

D'où Cf admet une branche infinie parabolique

De direction (yy') au Voisinage de $+\infty$(de même en $-\infty$)

● a) T : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -6x$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = -6x}$

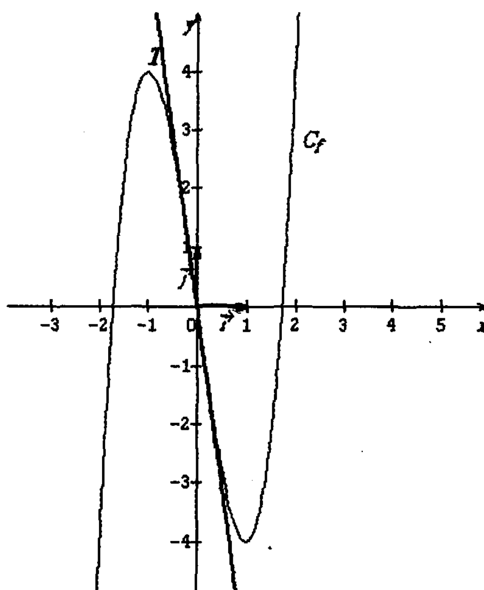
b) *Position de Cf. et sa tangente T :*

Etudions le signe de $f(x) - (-6x) = 2x^3$

D'où : Pour $x > 0$ Cf. Au dessus de T

Pour $x < 0$ Cf. Au dessous de T

c)



Exercice n° 5 f(x)=x³-3x-1

● $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘	-3	↗ $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2) ●● f est continue et strictement croissante sur

$]-\infty,-1[$ et $f(]-\infty,-1[)=\ ]-\infty,1[$

Comme $0\in\ ]-\infty,1[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet

une solution unique α_1 dans $]-\infty,-1[$

$f(-2)=-3$ et $f(-1)=1$

$f(-2)\text{x}f(-1)<0$ donc : $-2<\alpha_1<-1$

●● f est continue et strictement décroissante sur

$]-1,1[$ et $f(]-1,1[)=\ ]-3,1[$

Comme $0\in\ ]-3,1[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet

une solution unique α_2 dans $]-1,1[$

$f(0)\text{x}f(-1)=(-1).1<0$ donc : $-1<\alpha_2<0$

●● f est continue et strictement croissante sur

$]1,+\infty[$ et $f(]1,+\infty[)=\ ]-3,+\infty[$

Comme $0\in\ ]-3,+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet

une solution unique α_3 dans $]1,+\infty[$

$f(2)\text{x}f(1)=(-3).1<0$ donc : $1<\alpha_3<2$

<u>Conclusion</u>

L'équation $f(x)=0$ admet exactement les trois solutions α_1, α_2 et α_3 dans IR

● a) * $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=+\infty$

D'où Cf admet une branche infinie parabolique

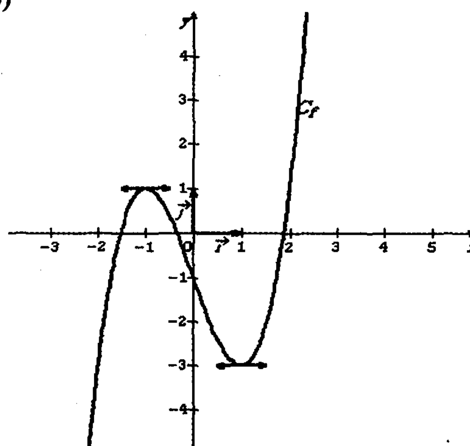
De direction (yy') au voisinage de $+\infty$

* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=+\infty$

D'où Cf admet une branche infinie parabolique

De direction (yy') au Voisinage de $-\infty$

b)



Exercice n° 6 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^3+10x^2-8x-1$

● $\frac{1}{2}(x-2)^2(x^2-4x)-1=\frac{1}{2}\left(x^4-8x^3+20x^2-16x\right)-1$

$=\frac{1}{2}x^4-4x^3+10x^2-8x-1=f(x)$

Par suite $\forall x\in IR$ on a :

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x^2-4x)-1$$

● $\forall x\in IR$; $4-x\in IR$ et

$$f(4-x)=\frac{1}{2}(4-x-2)^2\left[(4-x)^2-4(4-x)\right]-1$$

$$=\frac{1}{2}(2-x)^2\left[(4-x).(4-x-4)\right]-1$$

$$=\frac{1}{2}(x-2)^2\left[x^2-4x\right]-1=f(x)$$

D'ou : $-2-f(x)\neq f(4-x)$ ce qui prouve que le point W (2 , – 1) n'est pas un centre de symétrie pour Cf. donc il faut rectifier la question comme suit :

Montrer que la droite Δ d'équation x=2 est un axe de symétrie pour C_f

3) a) **rectifier W(2 ;0)**

Soit M (x, y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

et Posons M (X, Y) relativement au repère $(W,\vec{i},\vec{j})$

On a :

$$\overrightarrow{WM}=\overrightarrow{WO}+\overrightarrow{OM}=-2\vec{i}+x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$=(x-2)\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{i}+Y\vec{j}$$

Donc on aura $\begin{cases}X=x-2\\ Y=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=X+2\\ y=Y\end{cases}$

$M\in Cf \Leftrightarrow y=f(x)$

Remplacent x et y en fonction de X et Y dans l'expression de $f(x)$:

$$Y=\frac{1}{2}X^2\left[X^2-4\right]-1=\frac{1}{2}X^4-2X^2-1$$

Donc $F(X)=\frac{1}{2}X^4-2X^2-1$

b) X ∈ IR ; – X ∈ IR et F(– X) = F(X) donc F est une fonction paire ,on pourra donc étudier F sur IR_+

$F'(X)=2X^3-4X=2X.(X^2-2)$

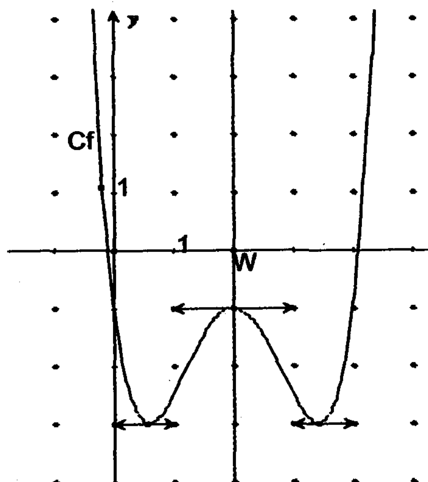
$\lim\limits_{X\to+\infty}F(X)=\lim\limits_{X\to+\infty}2X^3=+\infty$

$\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{F(X)}{X}=\lim\limits_{X\to+\infty}2X^2=+\infty$

D'où C_F. admet une branche infinie parabolique De direction (yy') au voisinage de + ∞

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$F'(x)$		–	0	+	
$F(x)$	-1 ↘		-3	↗	$+\infty$

c) On trace C_F dans le repère $(W,\vec{i},\vec{j})$ on obtient Cf



Exercice n° 7

● f est définie si et seulement si $x^2-4x+3\neq 0$

Or puisque a + b +c = 0 on aura

$x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x'=1$ *ou* $x''=3$

Donc $Df=IR\setminus\{1,3\}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

On a :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de x^2-4x+3		+	0	–	0	+	

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\leq0}}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\geq0}}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\leq0}}=\frac{18}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\leq0}}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

● les asymptotes de C_f sont les droites d'équations x = 1, x = 3 et y = 1

●

$$f'(x)=\frac{(x^2+3x)'(x^2-4x+3)-(x^2+3x)(x^2-4x+3)'}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x^2-4x+3)-(x^2+3x)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-7x^2+6x+9}{(x^2-4x+3)^2};x\in Df$$

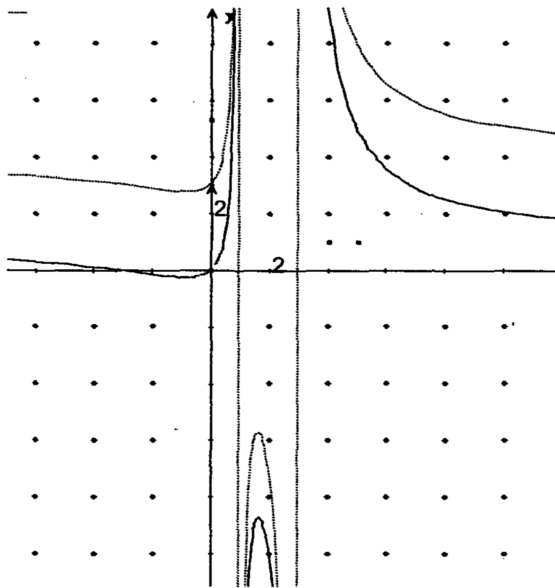
$$f'(x)=0\Leftrightarrow -7x^2+6x+9=0$$

$$\Delta'=b'^2-ac=9+9.7=8.9\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=6\sqrt{2}$$

$$x'=x'=\frac{3-6\sqrt{2}}{7}\simeq -0,78\ et\ x''=\frac{3+6\sqrt{2}}{7}\simeq 1,6$$

x	$-\infty$ x'	1	x''	3	$+\infty$
f'(x)	− 0 +	‖	+ 0 −	‖	−
f(x)	1 ↘ -0.3 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ -8.7 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 1

●



● on pourra remarquer graphiquement que C_f n'admet pas un axe de symétrie **erreur**

● a) $\forall x\in IR\setminus\{1,3\}$

$$g(x)-f(x)=\frac{4x^2-9x+9}{x^2-4x+3}-\frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}=\frac{3x^2-12x+9}{x^2-4x+3}$$

$$=\frac{3(x^2-4x+3)}{x^2-4x+3}=3\Rightarrow g(x)=f(x)+3$$

b) On obtient C_g par translation de C_f de vecteur $3\vec{j}$

c) voir repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

d)

x	$-\infty$ x'	1	x''	3	$+\infty$
f'(x)	− 0 +	‖	+ 0 −	‖	−
f(x)	4 ↘ 2.7 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ -5.7 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 4

Exercice n° 8 $\quad f(x)=\dfrac{x^2}{|x+1|-|x-1|}$

● a) f est définie si et seulement si $|x+1|-|x-1|\neq 0$

Or $|x+1|-|x-1|=0\Leftrightarrow|x+1|=|x-1|$

$\Leftrightarrow\ x+1=x-1\ ou\ x+1=-(x-1)=-x+1$

$\Leftrightarrow\ \underset{impossible}{1=-1}\ ou\ x=0\ d'où\ Df=IR^*$

b) $x\in IR^*$, $-x\in IR^*$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{|-x+1|-|-x-1|}=\frac{x^2}{|-(x-1)|-|-(x+1)|}$$

$$\underset{|-a|=|a|}{=}\frac{x^2}{|x-1|-|x+1|}=-f(x)$$

Donc f est une fonction impaire

● Ecrivant $f(x)$ sans le symbole valeur absolue

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
x+1	—	0	+		+
|x+1|	−x − 1	0	x+1		x+1
x -1	—		—	0	+
|x-1|	−x + 1		−x + 1	0	x -1

Don on aura : $\begin{cases} f(x)=-\dfrac{x^2}{2} & si\ \leq 1\\ f(x)=\dfrac{x}{2} & si\ -1\leq x\leq 1\\ f(x)=\dfrac{x^2}{2} & si\ x\geq 1\end{cases}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2}=0$

D'où f admet un prolongement par continuité noté g tel que : $g:x\to\begin{cases}g(x)=f(x) & si\ x\neq 0\\ g(0)=0\end{cases}$

● a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

Donc g est dérivable en 0 et g' (0) = $\dfrac{1}{2}$

b) $g'(x)=\begin{cases}-x & pour\ x\le -1\\ \frac{1}{2} & pour\ -1\le x\le 1\\ x & pour\ x\ge 1\end{cases}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
g'(x)	+	+	+	
g(x)	$-\infty$ ↗			$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}x^2=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2=+\infty$

● a)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x=+\infty$

* Cg admet une B I Parabolique au

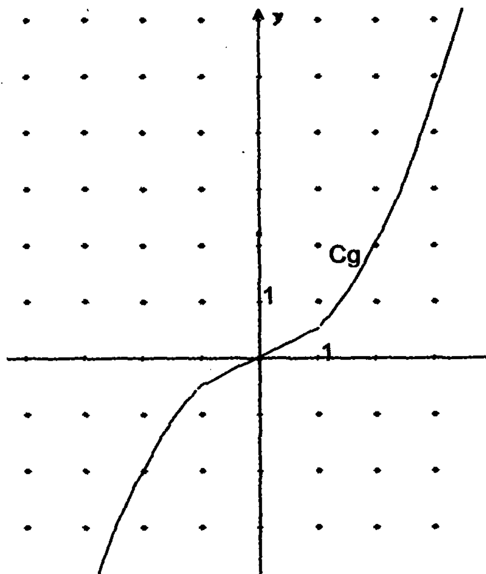
Voisinage de $-\infty$ de direction $(o\vec{j})$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$

* Cg admet une B I Parabolique

au Voisinage de $+\infty$ de direction $(o\vec{j})$

b)



Exercice n° 9 $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x+1}$

● a) $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x+1}=\frac{x^2+2x+1-2}{x+1}$

$=\frac{(x+1)^2-2}{x+1}=\frac{(x+1)^2}{x+1}-\frac{2}{x+1}=x+1-\frac{2}{x+1}$

2ème méthode :

$f(x)=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ b+c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\ b=-1-c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$ et $c=-2$

Donc $f(x)=x+1-\frac{2}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2}{x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{2}{x+1}=0$

Au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ C_f admet la droite Δ d'équation : y = x + 1 comme asymptote oblique.

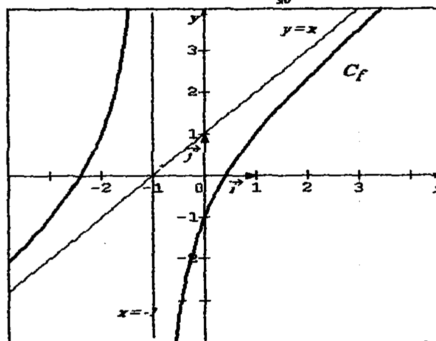
$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ donc la droite D'équation : x=-1 est une asymptote verticale à Cf

● $f'(x)=1+\frac{2}{(x+1)^2}\succ 0\quad \forall x\neq -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	+	‖	+
f(x)	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x+1}_{+\infty}-\frac{2}{\underbrace{x+1}_{\searrow 0}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{x+1}_{-\infty}-\frac{2}{\underbrace{x+1}_{\searrow 0}}=-\infty$



Exercice n° 10 $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2}$

● a) Df. = IR*

b) f est dérivable sur IR* est

$f'(x)=\frac{(x^4)'x^2-(x^2)'(x^4-1)}{x^4}=\frac{4x^3x^2-2x(x^4-1)}{x^4}$

$f'(x)=\frac{4x^5-2x^5+2x}{x^4}=\frac{2x(x^4+1)}{x^4}$ a le signe de x

f est une fonction paire ($f(-x) = f(x)$).
On étudie f sur IR^*_+

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

● a)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

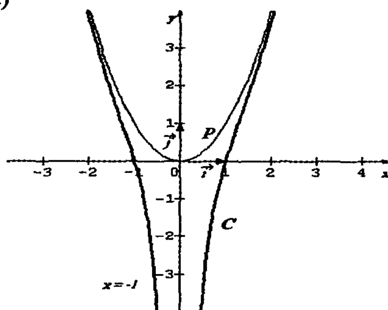
C admet une BIP au *Voisinage de* $-\infty$ *de direction* $(o\vec{j})$

b) P: $y = x^2$

c) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (f(x)-x^2) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2 - \frac{1}{x^2} - x^2 = 0$

Au voisinage de l'infinie C se comporte comme P donc elle admet deux branches paraboliques infinies de direction $(O,\vec{j})$

d)



Exercice n° 11

● a) $Df = IR$

- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = f(2)$

Donc f est continue à gauche en 2

- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{4}{3} = f(2)$

Donc f est continue à droite en 2
Conclusion : f est continue en 2

b) • $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to2^-} \frac{\frac{1}{3}(x^3-3x-2)}{x-2}$

On va factoriser l'expression x^3-3x-2
On sait que 2 est une racine de : $x^3-3x-2=0$
Donc $x^3-3x-2 = (x-2).(x^2+ax+b)$
$= x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$
Par identification on trouve : a = 2 et b = 1 ,d'où :

$\lim\limits_{x\to2^-} \frac{\frac{1}{3}(x^3-3x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{\frac{1}{3}(x-2)(x^2+2x+1)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to2^-} \frac{1}{3}.(x+1)^2 = 3$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et on a : $f'_g(2) = 3$

• $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{\frac{x^2}{x+1} - \frac{4}{3}}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{\frac{x^2-4x-4}{3(x+1)}}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to2^+} \frac{3x^2-4x-4}{3(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{(3x+2)(x-2)}{3(x-2)(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to2^+} \frac{3x+2}{3(x+1)} = \frac{8}{9}$

Donc f est dérivable à droite en 2 et on a : $f'_d(2) = \frac{8}{9}$

Conclusion : f n'est pas dérivable en 2
Interprétation : Au point A(2 ;*f(2)*) Cf Possède :
* une demi –tg à gauche de Coefficient directeur 3
* une demi -tg à droite de Coefficient directeur $\frac{8}{9}$

(Le point A(2 ;*f(2)*) est un point anguleux.

● a) On a pour $x \geq 2$:

$ax+b+\frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1}$

$\frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1} = f(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \text{ et } c=-2 \\ c=1 \end{cases}$

Donc $\boxed{f(x) = x-1+\frac{1}{x+1}}$

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

Au voisinage de + ∞ :C$_f$ admet la droite D d'équation : y = x + 1 comme asymptote oblique

• $f(x)-(x-1) = \frac{1}{x+1} > 0$ pour $x \geq 2$ donc

C$_f$ est au dessus de D sur [2 ;+∞[

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = +\infty$

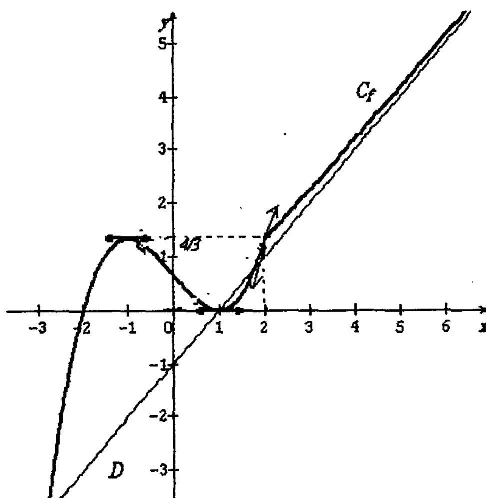
Au voisinage – ∞ C$_f$ admet une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$

- Variation de f :

f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,2]$ *et* $[2,+\infty[$; on a :

$$\begin{cases} f'(x)=x^2-1 & x<2 \\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} & x>2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$4/3$	↘	0	↗	$\frac{4}{3}$	↗	$+\infty$



Exercice n° 12 $\quad f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

● $Df=\{x\in IR;(x-1)^2\neq 0\}=IR-\{1\}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

● a) On a

$$ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$$

Par identification on aura : $\begin{cases} a=1 \\ -2a=-2 \\ a+b=0\Rightarrow b=-1 \\ c-b=0\Rightarrow b=-1 \end{cases}$

D'ou $\forall x\in IR-\{1\}: f(x)=x-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty \Rightarrow$ la droite x = 1 est une asymptote

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-x=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=0$$

Ce qui prouve que la droite d'équation : y = x est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

2) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $Df=IR-\{1\}$ et on a :

$$f'(x)=1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)^4+(x-1)^2+2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[(x-1)^3+(x-1)+2\right]}{(x-1)^4}$$

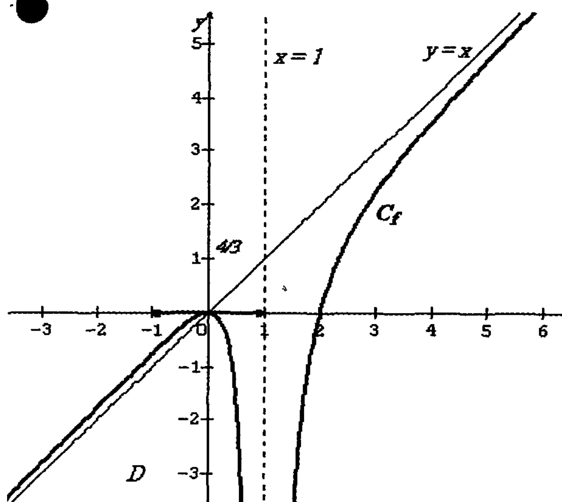
$$=\frac{(x-1)\left[(x^3-3x^2+3x-1+(x-1)+2\right]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)(x^3-3x^2+4x)}{(x-1)^4}$$

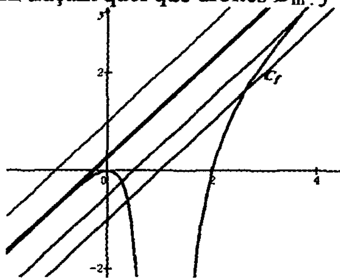
$$=\frac{x(x-1)(x^2-3x+4)}{(x-1)^4}$$

Or pour le signe de x^2-3x+4 ,on a $\Delta=9-16<0$ donc $x^2-3x+4>0$ et par suite le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x-1)$ d'ou le tableau de variation de f *suivant* :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$



En traçant quel que droites $D_m : y = x + m$



On remarque que :

- Si $m = \frac{1}{4}$ ou $m=0$: un seul point d'intersection
- Si $m < \frac{1}{4}$ et $m\neq0$: deux points d'intersection
- Si $m > \frac{1}{4}$: aucun point d'intersection

Exercice n° 13 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$

a) $Df = \{x \in IR ; x^2-2x-3 \geq 0\}$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
Signe de x^2-2x-3	+	0	−	0	+

D'où $Df =]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$

b) $x \to x^2-2x-3$: est continue et $x^2-2x-3 \geq 0$ pour tout $x \in Df =]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$ donc la fonction f est continue sur $Df =]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$

b)

- $\lim_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)-f(1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}-0}{x+1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}^2}{(x+1)\sqrt{x^2-2x-3}}$

$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x-3)}{\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

Donc f non dérivable à gauche en (− 1)

<u>Interprétation</u> : C_f admet au point (-1 ;0) une demi - tangente verticales de même sans que $\vec{j}$

- $\lim_{x\to3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3^+} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}-0}{x-3}$

$= \lim_{x\to3^+} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}^2}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}}$

$\lim_{x\to3^+} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x\to3^+} \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

$= \frac{4}{0^+} = +\infty$

Donc f non dérivable à droite en 3

<u>Interprétation</u> : C_f admet au point (3 ;0) une demi - tangente verticales de même sans que $\vec{j}$

c) $\lim_{x\to+\infty} x^2-2x-3 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^2-2x-3 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

a) $x^2-2x-3 > 0$ pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$ et on a

$f'(x) = \frac{(x^2-2x-3)'}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}$

$= \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

b)

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	−	‖	‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0		0 ↗ $+\infty$	

a) Pour tout $x \in Df =]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$ on a

$x^2-2x-3 = x^2-2x+1-4 = (x-1)^2-4$

Donc $f(x) = \sqrt{(x-1)^2-4}$

- $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x+1] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x-3}-(x-1)$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^2-4}^2-(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2-4}+(x-1)}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2-4-(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2-4}+x-1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\underbrace{\sqrt{(x-1)^2-4}+x-1}_{+\infty}} = 0$

- $\lim_{x\to-\infty} [f(x)+x-1] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{(-x+1)^2-4}-(-x+1)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{(-x+1)^2-4}^{\,2}-(-x+1)^2}{\sqrt{(-x+1)^2-4}+(-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x+1)^2-4-(-x+1)^2}{\sqrt{(x-1)^2-4}+x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{\underbrace{\sqrt{(-x+1)^2-4}-x+1}_{+\infty}} = 0$$

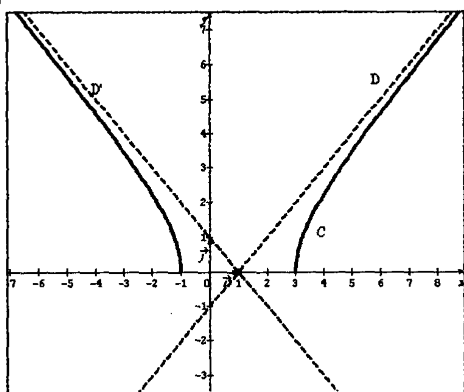
c) on a • $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$ donc

La courbe C admet une asymptote oblique D au voisinage de + ∞ d'équation : y = x − 1

• on a $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+1)=0$ donc

La courbe C admet une asymptote oblique D au voisinage de − ∞ d'équation : y = − x + 1

4)



Exercice n° 14 $f(x)=\sqrt{(x-2)^2-1}$

● On a :

$$(x-2)^2-1\ge 0 \Leftrightarrow (x-2)^2\ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow |x-2|\ge 1 \Leftrightarrow x-2\le -1 \text{ ou } x-2\ge 1$$

$$\Leftrightarrow x\le 1 \text{ ou } x\ge 3$$

Donc : $Df =]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

● a) $x\le 1 \Rightarrow 2-x\ge 3$ ∘ $x\ge 3\Rightarrow 2-x\le 1$

Donc

$x\in Df \Rightarrow 4-x\in Df$

$f(4-x)=\sqrt{(4-x-2)^2-1}=\sqrt{(2-x)^2-1}=\sqrt{(x-2)^2-1}$

$\Rightarrow f(2\times 2-x)=f(x)$ d'où la droite D: $x=2$ est un axe de symétrie pour la courbe C

b) f est dérivable sur $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ et on a

$$f'(x)=\frac{((x-2)^2-1)'}{2\sqrt{(2-x)^2-1}}=\frac{2(x-2)}{2\sqrt{(2-x)^2-1}}=\frac{x-2}{\sqrt{(2-x)^2-1}}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x-2)^2-1}-(x-2)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x-2)^2-1}^{\,2}-(x-2)^2}{\sqrt{(x-2)^2-4}+(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^2-4-(x-2)^2}{\sqrt{(x-2)^2-1}+x-2}$$

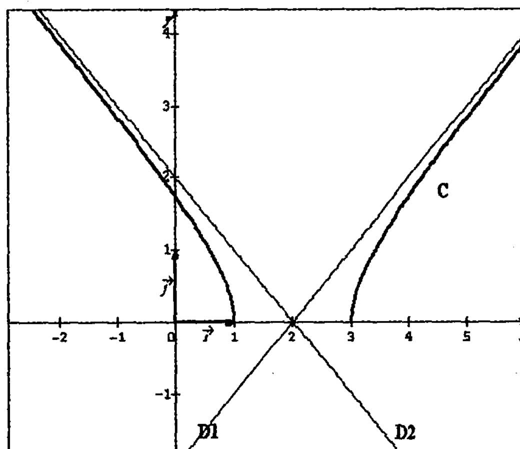
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\underbrace{\sqrt{(x-2)^2-4}+x-2}_{+\infty}}=0$$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$ ce qui prouve que

La droite Δ_1 d'équation : y = x − 2 est une asymptote oblique à C au voisinage de + ∞

De même $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x-2)=0$ ce qui prouve que

La droite Δ_2 d'équation : y = − x + 2 est une asymptote oblique à C au voisinage de − ∞



Exercice n° 15 $f(x)=1-\sqrt{x^2+x}$

● a)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $Df =]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$

b)

$x\in Df \Rightarrow x<-1 \text{ ou } x>0 \Rightarrow -1-x>0 \text{ ou } -1-x<-1$

$\Rightarrow -1-x\in Df$

$f(-1-x)=1-\sqrt{(-1-x)^2-1-x}=1-\sqrt{x^2+x}$

$\Rightarrow f(2\times(-\frac{1}{2})-x)=f(x)$ D'où la droite

D: $x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe C

c) D: $x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C donc on pourra étudier f sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[\cap Df=[0,+\infty[$

● a)

• $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{x^2+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\sqrt{x^2+x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x(x+1)}{x\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

f n'est pas dérivable en 0 .
Cf Possède une Demi tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse 0.

$\forall x\in]0;+\infty[\,;f'(x)=0-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

$=-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}<0$

c)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	−
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{+\infty}=-\infty$

● a)

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(-x+\frac{1}{2})=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x^2+x})-(-x+\frac{1}{2})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+\frac{1}{2})^2-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+\frac{1}{4}-x^2-x}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}}{\underbrace{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}_{+\infty}}=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(-x+\frac{1}{2})$ ce qui prouve que

La droite D d'équation : $y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

b) $f(x)-(-x+\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}\geq0$: C au dessus D

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}{x}$

$|x|=-x$ pour $x\leq0$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\sqrt{x^2+x}-x$

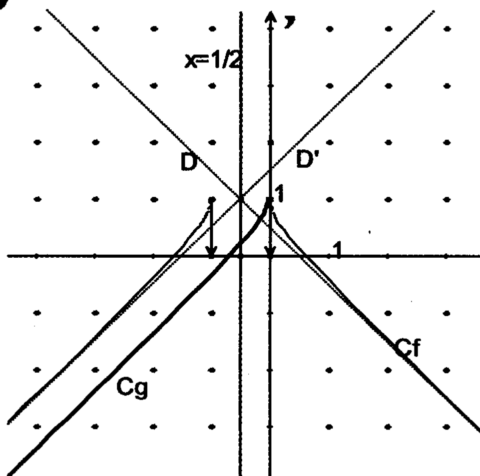
$=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)-\sqrt{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-x)^2-(x^2+x)}{1-x+\sqrt{x^2+x}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-2x+x^2-x^2-x}{1-x+\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{1-x+\sqrt{x^2+x}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(\frac{1}{x}-3)}{x(\frac{1}{x}-1-\sqrt{1+\frac{1}{x}})}=\frac{3}{2}$

Donc D': $y=x+\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique pour C_f au voisinage de $-\infty$

●



● g est définie sur IR car $x^2+|x|\geq0$

• Or pour $x\geq0$ on a : $x=|x|$ donc $f(x)=g(x)$

D'où sur [0, +∞[, la courbe de g ce coïncide avec C_f.

• $x\in IR,-x\in IR$ et $g(-x)=g(x)$

Donc g est paire, par suite C_g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice n° 16 $f_n(x)=x^n\sqrt{x-1}$

$f_n(x)=x^n\sqrt{x-1},n\in IN$

● $Df_n=[1,+\infty[$

● Sur $]1,+\infty[$: f_n est dérivable et on a :

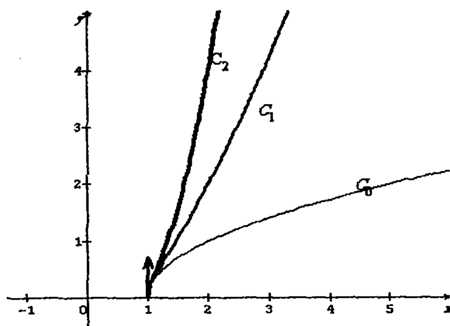
$$f_n'(x)=nx^{n-1}\sqrt{x-1}+x^n.\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{2nx^{n-1}(x-1)+x^n}{2\sqrt{x-1}}=\frac{x^{n-1}\left[\overbrace{2n(x-1)+x}^{\geq 0}\right]}{2\sqrt{x-1}},n\geq 1$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

● $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n\sqrt{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n-1}\sqrt{x-1}=+\infty$; $n\geq 1$

Au voisinage $+\infty$ Cf_n Admettent une branche parabolique infinie de direction $(O,\vec{j})$ pour $n\geq 1$



Exercice n° 17 $f(x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$

● on sait que ; $x\to\sin(ax+b)$ est $\frac{2\pi}{|a|}$ périodique $a\neq 0$

Donc $\frac{2\pi}{2}=\pi$ est une période de $f(x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$ 2)

a) $f'(x)=2\cos(2x+\frac{2\pi}{3});x\in IR$

$$\begin{cases}f'(x)=0\\ x\in[0,\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(2x+\frac{2\pi}{3})=0\\ x\in[0,\pi]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\\ x\in[0,\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\\ x\in[0,\pi]\end{cases}$$

Or : $0\leq x\leq\pi\Leftrightarrow 0\leq-\frac{\pi}{12}+k\pi\leq\pi$

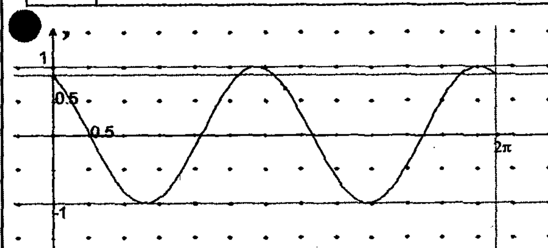
$\Leftrightarrow$ $0.16\approx\frac{1}{6}\leq k\leq\frac{13}{6}\approx 2.16\Leftrightarrow k=1$ ou $k=2$

Donc $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}$ ou $x=\frac{11\pi}{12}$

b)

x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

●



• si $k\succ 1$ ou $k\prec -1\Rightarrow 0$ solution

• si $k=1$ ou $k=-1\Rightarrow 2$ solutions

• si $k\in]-1;1[\setminus\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\Rightarrow 4$ solutions

• si $k=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 5$ solutions

Exercice n° 18

$x\in IR, f(x)=\sin 2x-2\sin x$

●

$x\in IR,-x\in IR$ et $f(-x)=\sin(-2x)-2\sin(-x)$

$=-\sin 2x+2\sin x$

$=-(\sin 2x-2\sin x)$

$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$. Donc g est impaire

● • le plus petit réel strictement positif T vérifiant $f(x+T)=f(x)$ est $T=2\pi$ .donc f est 2π-périodique

● f est de période 2π donc on pourra étudier f sur l'intervalle $Df\cap[-\pi,\pi]=IR\cap[-\pi,\pi]=[-\pi,\pi]$

De plus f est impaire par la suite on étudie f sur $[0,\pi]$

• On a : $f'(x)=2\cos 2x-2\cos x$, or $\cos 2a=2\cos^2 a-1$

Ce qui donne : $f'(x)=2(\cos^2 x-\cos x-1)$

Posons $\cos x=t$ on trouve :

$$\begin{cases}2t^2-t-1=0\\ t=\cos x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t'=1\text{ ou }t''=-\frac{1}{2},car:a+b+c=0\\ t=\cos x\end{cases}$$

donc : $f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x=1$ ou $\cos x=-\frac{1}{2}$; $x\in[0,\pi]$

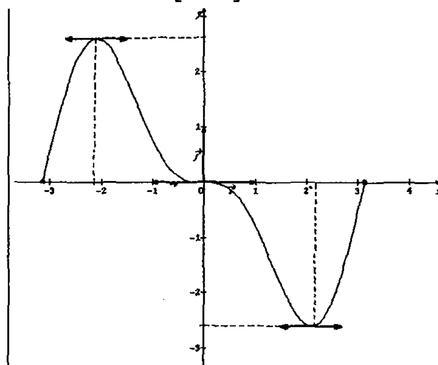
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\pi\\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\quad k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

Conclusion $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{2\pi}{3}$

Tableau des variations de f :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0

• Courbe C sur $[-\pi,\pi]$:



Exercice n° 19 $f(x)=\sin x+\cos^2 x$

● $x\in IR, x+2\pi\in IR$ et

$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\cos^2(x+2\pi)$

$=\sin x+\cos^2 x=f(x)$

Donc f est 2π- périodique

● $x\in IR, 2\times\frac{\pi}{2}-x=\pi-x\in IR$

$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\cos^2(\pi-x)$

$=\sin x+(-\cos x)^2=\sin x+\cos^2 x$

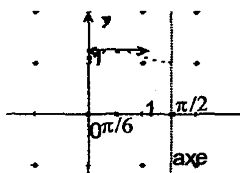
$=f(x)$

Donc la droite $\Delta : x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C_f

3) g restriction de f à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$g'(x)=\cos x-2\cos x.\sin x=\cos x(1-2\sin x)$ a le même signe que 1-2sin x

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)		$+$	0	$-$	
g(x)	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1



Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$

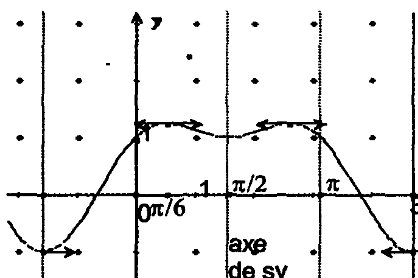
Tableau des variations de h :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0
$h'(x)$	0	$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	1

Soit C' la réunion de C_h et C_g

La courbe de la restriction de f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ est la réunion de C' et $S_\Delta(C')$ avec $\Delta : x=\frac{\pi}{2}$

Courbe Cf sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$:



Exercice n° 20 $g(x)=tg(x)-x$

● g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$g'(x)=1+tg^2x-1=tg^2x\geq 0$

$g(0)=0$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tgx-x=+\infty-\frac{\pi}{2}=+\infty$

Tableau des variations de g :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)		$+$	
g(x)	0	$\nearrow$	$+\infty$

On constate que 0 est un minimum global pour g sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $g(x)\geq 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

● $\bullet\forall x\in IR^*, \left|\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq 1 \Rightarrow |x|.\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq|x|$

$\Rightarrow\left|x\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq|x|$ et $\lim_{x\to 0}|x|=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}x\sin\frac{\pi}{x}=0$

D'où $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, par suite f est continue en 0

• $x \to u(x)=\frac{\pi}{x}$ est continue sur IR* et u (IR*) = IR*

Et la fonction $\sin x$ est continue sur IR* ce qui prouve que $\sin\frac{\pi}{x}$ est continue sur IR* par suite $f(x)$ est continue sur IR* (produit de deux fonction continues)

<u>Finalement</u> : f est continue sur IR* et en 0 donc f est continue sur IR

• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$

Pas de limite en 0 donc f non dérivable en 0

• $x \to u(x)=\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur IR* et u (IR*) = IR*

et la fonction $\sin x$ est dérivable sur IR* ce qui prouve que $\sin\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur IR* par suite $f(x)$ est dérivable sur IR* (produit de deux fonction dérivables)

Conclusion : f est dérivable sur IR*

● h restriction de f sur $]2,+\infty[$

a)

$$h'(x)=\sin\frac{\pi}{x}+x\times(-\frac{\pi}{x^2})\times(-\cos\frac{\pi}{x})$$

$$=\sin\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$$

$$x\succ 2\Leftrightarrow\frac{1}{x}\prec\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\prec\frac{\pi}{x}\prec\frac{\pi}{2}\quad d'ou\ h'(x)\geq 0$$

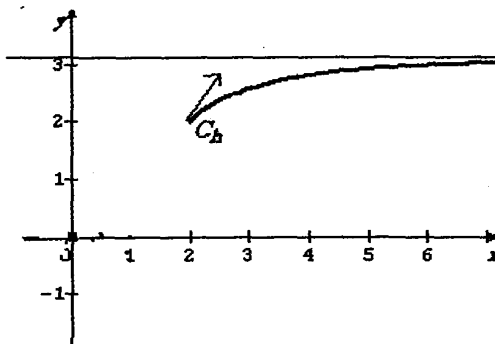
x	2	+∞
h'(x)	+	
h(x)	2 ↗	π

$$\lim_{x\to 2^+}h(x)=\lim_{x\to 2^+}x\sin\frac{\pi}{x}=2\times 1=2$$

Posons $t=\frac{\pi}{x}$, si $x\to+\infty$ alors $\frac{\pi}{x}\to 0$ et $x=\frac{\pi}{t}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{t\to 0}h(t)=\lim\limits_{t\to 0}(\pi\times\frac{\sin t}{t})=\pi$

b)



c) h est continue et strictement croissante sur $]2,+\infty[$ donc h réalise une bijection de $]2,+\infty[$ sur $]2,\pi[$

Exercice n° 21 $f(x)=\sqrt{tg(x)}$

● f *est dérivable sur* $]0;\frac{\pi}{2}[$ et on a :

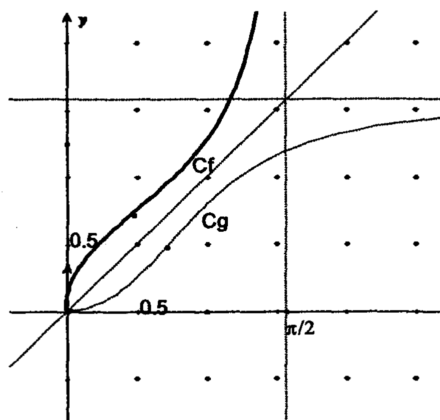
$$f'(x)=\frac{tg'(x)}{2\sqrt{tgx}}=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{tgx}}\succ 0$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	+∞

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{tgx}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{tgx}{x\sqrt{tgx}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{tgx}{x}.\frac{1}{\sqrt{tgx}}=1\times\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Donc f est non dérivable à droite en 0 et Cf admet au point O une demi-tg verticale dirigée vers le haut



● f est continue et strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

donc f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0,+\infty[$

3) $g=f^{-1}$

a) Cf admet au point O une demi-tg verticale dirigée vers le haut d'où Cg admet au point O une demi-tg horizontale d'où g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$

f *est dérivable sur* $]0;\frac{\pi}{2}[$ et $f'(x)\neq 0\ \forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$,donc

g est dérivable sur $]0,+\infty[$

<u>Conclusion</u> : g est dérivable sur $[0,+\infty[$

* $\forall x\in]0;+\infty[$; $g'(x)=\frac{1}{f'[(g)(x)]}$

$$=\frac{1}{\frac{1+tg^2(g(x))}{2\sqrt{tg(g(x))}}}=\frac{2\sqrt{tg(g(x))}}{1+tg^2(g(x))}\quad(1)$$

Or: $fog(x)=\sqrt{tg(g(x))}=x \Rightarrow tg^2(g(x))=x^4$

Conclusion : $\boxed{g'(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}, \forall x \in [0,+\infty[}$

b) $f(0)=0$ donc $g(0)=0$

$g(1)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{tg\alpha}=1 \Leftrightarrow tg\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{4}$ donc $\boxed{g(1)=\dfrac{\pi}{4}}$

c) $\forall x \in]0,+\infty[$, posons : $F(x)=g(x)+g(\dfrac{1}{x})$

• $x \to u(x)=\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $u(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ et la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ ce qui prouve que $g(\dfrac{1}{x})$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ par suite $F(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de deux fonction dérivables)

$$F'(x)=g'(x)+(g(\frac{1}{x}))'=g'(x)+(\frac{1}{x})'g'(\frac{1}{x})=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{1}{x^2}\times\frac{2}{x(\frac{x^4+1}{x^4})}$$

$$=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2}{x^3(\frac{x^4+1}{x^4})}=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2}{(\frac{x^4+1}{x})}=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2x}{1+x^4}=0$$

D'où $F'(x)=0 \Leftrightarrow F(x)=k$ (constante)

Or $F(1)=g(1)+g(\dfrac{1}{1})=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, g(x)+g(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}}$$

4) a) • $x \to \cos\pi x$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$

Or: $\pi x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos\pi x \neq 0 \Rightarrow v(x)=\dfrac{1}{\cos\pi x}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ et on a : $v'(x)=\dfrac{\pi\sin\pi x}{\cos^2\pi x}$

• $x \in \left]-\dfrac{1}{2},0\right[\Rightarrow \sin\pi x \prec 0$

• $x \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right[\Rightarrow \sin\pi x \succ 0$

Donc v est décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{2},0\right[$ et elle est croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ par suite $v(\left]-\dfrac{1}{2},0\right[)=]1,+\infty[$ et $v(\left]0,\dfrac{1}{2}\right[)=]1,+\infty[$

<u>Conclusion</u> : $v(\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[)=]1,+\infty[$

Comme $]1,+\infty[\subset]0,+\infty[$ et g est dérivable sur $]0,+\infty[$ il découle:

$g(\dfrac{1}{\cos\pi x})$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$

• $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[: h'(x)=(\dfrac{1}{\cos\pi x})'g'(\dfrac{1}{\cos\pi x})$

$$h'(x)=\frac{\pi\sin\pi x}{\cos^2\pi x}\times\frac{2\frac{1}{\cos\pi x}}{1+(\frac{1}{\cos\pi x})^4}=\frac{2\pi\cos\pi x.\sin\pi x}{1+\cos^4\pi c}$$

Puisque sur, $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$, $\cos\pi x \geq 0$ alors le signe de $h'(x)$ est celui de $\sin\pi x$ qui s'annule et change de signe en 0

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$
h'(x)		−	0	+	
h(x)	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

* $h(0)=g(\dfrac{1}{\cos 0})=g(1)=\dfrac{\pi}{4}$

* $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\dfrac{1}{\cos\pi x} \underset{X=\pi x}{=} \lim\limits_{X\to(-\frac{\pi}{2})^+}\dfrac{1}{\cos X}=\dfrac{1}{0^+}+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\dfrac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+} h(x)=\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+} g(\dfrac{1}{\cos\pi x})=\dfrac{\pi}{2}$

* $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-}\dfrac{1}{\cos\pi x} \underset{X=\pi x}{=} \lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1}{\cos X}=\dfrac{1}{0^+}+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\dfrac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} h(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} g(\dfrac{1}{\cos\pi x})=\dfrac{\pi}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} h(x)=\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+} h(x)=\dfrac{\pi}{2}$

Donc h est prolongeable par continuité et soit $H(x)$ le prolongement par continuité de h on a :

$$\begin{cases} H(x)=h(x) & x \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\\ H(\frac{1}{2})=H(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice n° 22

● a)

$\forall x \in IR, (\cos x)'=-\sin x$ et $(\cos^2 x)'=-2\cos x.\sin x$

$\Rightarrow (-2\cos^2+2\cos x+1)'=4\sin x\cos-2\sin x$

donc $\boxed{f'(x)=2\sin x(2\cos x-1)}$

b) $2\sin x(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \sin x=0$ ou $\cos x=\dfrac{1}{2}$

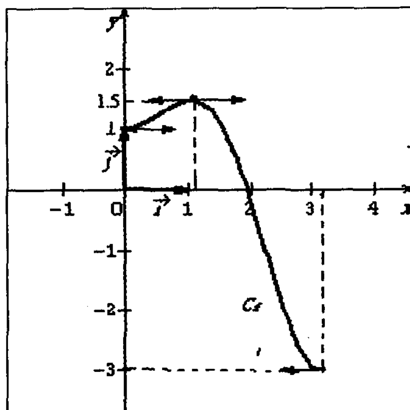
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\pi$ ou $x=\dfrac{\pi}{3}$ dans $[0;\pi]$

D'où $S_{[0,\pi]}=\left\{0,\pi,\dfrac{\pi}{3}\right\}$

c)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3

d)



a) g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ donc g réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ sur L'intervalle $J=\left[-3,\frac{3}{2}\right]$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur L'intervalle $J=\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

b) g est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ et $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{3},\pi\right[$ donc g^{-1} est dérivable sur $D=\left]-3,\frac{3}{2}\right[$

b) $t \in J$, on sait que : $g\circ g^{-1}(t)=t$ donc on a :

$$-2\cos^2(g^{-1}(t))+2\cos(g^{-1}(t))+1=t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-2\cos^2(g^{-1}(t))+2\cos(g^{-1}(t))+1-t=0\ (E)$$

Dans l'équation (E) posons $\cos(g^{-1}(t))=X$ on aura :
$-2X^2+2X+1-t=0\ (E')\ et\ X=\cos(g^{-1}(t))$

On va résoudre l'équation (E'). $-2X^2+2X+1-t=0$

$\Delta'=b'^2-ac=1+2(1-t)=3-2t\geq 0$ car $t\leq\frac{3}{2}$

D'où $\begin{cases} X'=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-1+\sqrt{3-2t}}{-2}=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2} \\ X''=\dfrac{-1-\sqrt{3-2t}}{-2}=\dfrac{1+\sqrt{3-2t}}{2} \end{cases}$

Ce qui donne $\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1+\sqrt{3-2t}}{2}\geq 0$

ou $\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2}$

Or le cos change de signe sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ et $g^{-1}(t)\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

Donc : $\boxed{\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2};t\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]}$

On sait que : $\cos^2(g^{-1}(t))+\sin^2(g^{-1}(t))=1$ d'où

$$\sin^2(g^{-1}(t))=1-\cos^2(g^{-1}(t))$$

$$=1-\left(\frac{1-\sqrt{3-2t}}{2}\right)^2=\frac{4-(1-2\sqrt{3-2t}+3-2t)}{4}$$

$$=\frac{2t+2\sqrt{3-2t}}{4}=\frac{\overbrace{t+\sqrt{3-2t}}^{\geq 0}}{2}$$

Donc : $\boxed{\sin(g^{-1}(t))=\dfrac{\sqrt{t+\sqrt{3-2t}}}{\sqrt{2}};t\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]}$

Calculons maintenant la dérivée de $g^{-1}(t)$

$$\forall t\in\left]-3,\frac{3}{2}\right[:\ (g^{-1})'(t)=\frac{1}{g'(g^{-1}(t))}$$

$$=\frac{1}{2\sin g^{-1}(t).(2\cos g^{-1}(t)-1)}$$

Remplaçant $\sin(g^{-1}(t))$ et $\cos(g^{-1}(t))$ par les résultas (1) et (2) trouvées précédemment il résulte :

$$(g^{-1})'(t)=\frac{1}{2.\dfrac{\sqrt{t+\sqrt{3-2t}}}{\sqrt{2}}\left(2.\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2}-1\right)}\Rightarrow$$

$$\boxed{(g^{-1})'(t)=\frac{-1}{\left(\sqrt{2\left(\sqrt{t+\sqrt{3-2t}}\right)}\right)\left(\sqrt{3-2t}\right)}},\forall t\in\left]-3,\frac{3}{2}\right[$$

Exercice n° 23 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{2+x}$

a) $\forall x\neq -2$:

$$-x+2-\frac{3}{x+2}=\frac{4-x^2-3}{x+2}=\frac{1-x^2}{x+2}=f(x)$$

f est deux fois dérivables sur $IR\setminus\{2\}$ (fonction rationnelle)

$$f'(x)=(-x+2-\frac{3}{x+2})'=-1+\frac{3}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=(-1+\frac{3}{(x+2)^2})'=-\frac{3\times 2(x+2)}{(x+2)^4}=-\frac{6(x+2)}{(x+2)^4}$$

Tableau des variations de f'

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	+	‖	−
$f'(x)$	-1 ↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘ -1

Donc puisque $[-1,1]\subset]-2,+\infty[$ en déduire que f' est strictement décroissante sur $[-1,1]$

$$f'([-1,1])=\left[-\frac{2}{3},2\right]$$

d)

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -1+\frac{3}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow (x+2)^2=3$$

$$\Leftrightarrow x+2=\sqrt{3}\ ou\ x+2=-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x=-2+\sqrt{3}\ ou\ x=-2-\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+	‖	+	0	−
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$4+2\sqrt{3}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$4-2\sqrt{3}$	↘ $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \underbrace{-x}_{\nearrow(-\infty)}+2+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow+\infty}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \underbrace{-x}_{\nearrow(+\infty)}+2+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow-\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+} \overbrace{-x+2}^{4}+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow 0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-} \overbrace{-x+2}^{4}+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow 0^-}=-\infty$$

e)

$$0\le x\le 1\Leftrightarrow 4\le (x+2)^2\le 9\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\frac{3}{(x+2)^2}\le\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le -1+\frac{3}{(x+2)^2}\le -\frac{1}{4}\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow \left|-1+\frac{3}{(x+2)^2}\right|\le\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow |f'(x)|\le\frac{2}{3},\forall x\in[0,1]$$

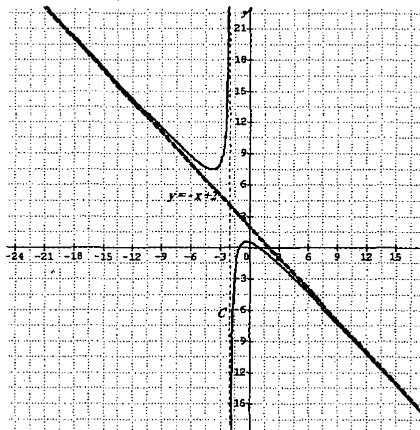
f) f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in[0,1]$ on a : $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$ d'où d'après l'inégalité des accroissement finis on aura pour $x\in[0,1]$ et $y\in[0,1]$: $|f(x)-f(y)|\le\frac{2}{3}|x-y|$

Comportement de f au voisinage de l'infini :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x+2)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{3}{x+2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+2)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{3}{x+2}=0$$

$\Rightarrow y=-x+2$ est une asymptote oblique à C



a) $t\in IR$,

$$g(\pi-t)=\frac{1-\sin^2(\pi-t)}{2+\sin(\pi-t)}\overset{(\sin(\pi-t)=\sin t)}{=}\frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}=g(t)$$

b) $g(\pi-t)=g(t)\Rightarrow$ la droite $\Delta : t=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C de plus g est de période 2π donc l'étude et la représentation graphique de la restriction g à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe de g ;en effet C_g est la réunion des images de $(C_1 \cup C_1')$ par les translations de vecteurs $k.2\pi\vec{i}$ $k\in\mathbb{Z}$ avec C_1 la représentation graphique de la restriction g à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $C_1'=S_\Delta(C_1)$

c) On remarque que g(t)=f(sin(t))

Donc g'(t)= sin'(t) .f'(sin(t))=cos(t).f'(sin(t))

Donc : $g'(t))=\cos t\times f'(\sin t)$

d)

$g'(t))=0=\cos t\times f'(\sin t)\Rightarrow \cos t=0\ ou\ f'(\sin t)=0$

Comme $\cos t\neq 0$ alors : $g'(t))=0\Leftrightarrow f'(\sin t)=0$

Or on sait que f' est strictement décroissante sur $[-1,1]$ et $f'([-1,1])=\left[-\frac{2}{3},2\right]$

D'autre part la fonction sin est une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$

Donc la fonction $t\to f'(\sin(t))$ est une bijection strictement décroissante de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[-\frac{2}{3},2\right]$

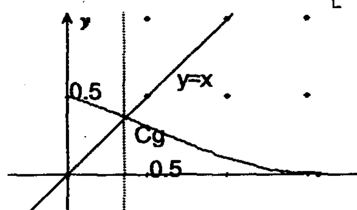
Et Comme $0\in\left[-\frac{3}{2},2\right]$ donc l'équation $f'(\sin t)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

e) $f'(\sin\alpha)=0\Leftrightarrow \sin\alpha=-2+\sqrt{3}$ d'où

$$g(\alpha)=\frac{1-\sin^2\alpha}{2+\sin\alpha}=\frac{1-(4-4\sqrt{3}+3)}{1+2-\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}-6}{3-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow g(\alpha)=-\frac{7}{2}+\sqrt{3}$$

f) g'(t) à le signe de $f'(t)\leq 0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$



● a) l'intersection de C_g et la droite $y=x$ est le point d'abscisse 0.37 donc : g (t) = t donne t = 0.37

b) posons h (t) = g(t) – t

$h'(t)=g'(t)-1\leq 0$ d'où h est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $h\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[h(\frac{\pi}{2}),h(0)\right]=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right]$

Comme $0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right]$ on aura l'équation g(t) – t = 0 admet une solution unique t_0 appartient à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

5) a) g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a:

$|g'(x)|=|f'(\sin t)\times\cos t|\leq\frac{2}{3}$ d'où d'après l'inégalité des accroissement finis on aura pour $t_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $u_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$:|g(u_n)-g(t_0)|\leq\frac{2}{3}|u_n-t_0|\Leftrightarrow|u_{n+1}-t_0|\leq\frac{2}{3}|u_n-t_0|$

b) • pour n = 0 on a : $|u_0-t_0|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^0|u_0-t_0|$

Vrai car $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$

• Supposons que $|u_n-t_0|\leq(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|$ et montrons que $|u_{n+1}-t_0|\leq(\frac{2}{3})^{n+1}|u_0-t_0|$, en effet :

$|u_{n+1}-t_0|\leq\frac{2}{3}|u_n-t_0|$ *et* $|u_n-t_0|\leq(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|$

$\Rightarrow|u_{n+1}-t_0|\leq\frac{2}{3}\times(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|\leq(\frac{2}{3})^{n+1}|u_0-t_0|$

Donc d'après le principe de raisonnement par récurrence on a pour tout entier naturel n : $|u_n-t_0|\leq(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|$

c) Puisque $-1\leq\frac{2}{3}\leq 1$ il résulte $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n=0$ et par suite

$\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n\overbrace{|u_0-t_0|}^{\neq 0\ (constante)}=0$ ce qui donne $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=t_0}$

Exercice n° 24

● $x\in IR, x+2\pi\in IR$ *et*

$$f(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)-\sin(x+2\pi)$$
$$=\sin^2 x-\sin x=f(x)$$

Donc f est périodique de période $T=2\pi$

Par suite on étudie f sur $[-\pi,\pi]$

f est dérivable sur IR et on a :

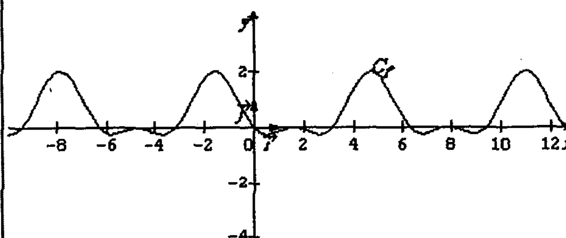
$f'(x)=2\sin x\cos x-\cos x=\cos x\times(2\sin x-1)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x=0\ ou\ \sin x=\frac{1}{2}, x\in[-\pi,\pi]$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{6}\ ou\ x=\frac{5\pi}{6}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

On trace C_f sur $[-\pi,\pi]$ puis la complète par les translations des vecteurs $2k\pi\vec{i}$



$g(x)=\cos(3x)\cos^2(x)$

● $x\in IR, x+2\pi\in IR$ et

$g(x+2\pi)=\cos(3(x+2\pi))\cos^2(x+2\pi)$

$=\cos(3x+3\times 2\pi)\cos x=\cos 3x\cos^2 x=f(x)$

Donc g est périodique de période $T=2\pi$

Aussi on a :

$x\in IR, -x\in IR$ et

$g(-x)=\cos(3(-x))\cos^2(-x)=\cos 3x\cos^2 x=g(x)$

Donc g est paire par suite on étudie f sur $[0,\pi]$

On construit C_g sur $[0,\pi]$ puis par symétrique par rapport à la droite des ordonnées on obtient le graphe de C_g sur $[-\pi,\pi]$ finalement on complète C_g par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$

- Etude des variations de g :

g est dérivable sur IR et on a :

$g'(x)=-3\sin 3x\cos^2 x-2\sin x.\cos x.\cos 3x$

Or on sait que : $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ (*voir cours nombre complexe partie linéarisation)*

Donc :

$g(x)=(4\cos^3 x-3\cos x).\cos^2 x=4\cos^5 x-3\cos^3 x$

$\Leftrightarrow$

$g'(x)=-20\sin x.\cos^4 x+9\sin x.\cos^2 x$

$=\sin x.\cos^2 x.(9-20\cos^2 x)$

Sur $[0,\pi]$ le signe de g'(x) est celui de $9-20\cos^2 x$

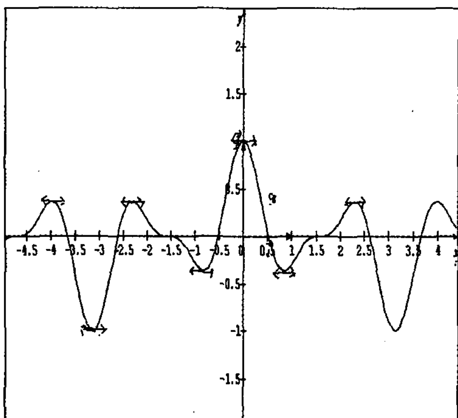
$9-20\cos^2 x=0\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{9}{20}\Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{3}{2\sqrt{5}}$

En utilisant une calculatrice on trouve :

$x\simeq 48°\simeq\frac{4\pi}{5}$ | $x\simeq 132°\simeq\frac{11\pi}{5}$

x	0		$\frac{4\pi}{15}$		$\frac{11\pi}{15}$		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↘	(-0.35)	↗	0.35	↘	-1

Courbe de la fonction g :



Exercice n° 25

● a) $x\in IR$, g dérivable car $x^2+1\succ 0$

$$g'(x)=0+\frac{\sqrt{x^2+1}-x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1})},\forall x\in IR$$

b) $g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1})}\succ 0,\forall x\in IR$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	2

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=1-1=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=1+1=2$$

On a : $g(IR)=]0.2[\Rightarrow g(x)\succ 0$

●a) $f(x)=x-1+\sqrt{x^2+1}$

$$x\in IR, f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)>0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -1+\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -1+\left[\frac{(\sqrt{1+x^2}+x).(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -1+\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}=\lim_{x\to-\infty} -1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

$$=-1+\frac{1}{+\infty}=-1$$

la droite d'équation : $y = -1$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$

c)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$

● a)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \to +\infty}\left[\sqrt{1+x^2} - x\right]$$

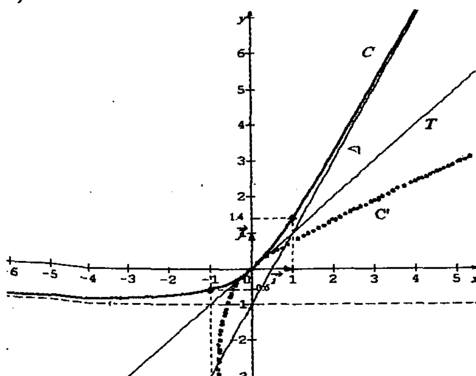
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

b) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) \Rightarrow \boxed{T : y = x}$

c)



● a) f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur l'intervalle

J= $g(IR) = \left]-1;+\infty\right[$

b) on a $f(1) = \sqrt{2}$ $\quad$ *donc* $f^{-1}(\sqrt{2}) = 1$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

c) Voir repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

RÉSUMÉ DU COURS

Forme Algébrique d'un nombre complexe

P est le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

* L'écriture $z = a + i\,b$, où a et b sont deux réels, est la forme algébrique de z.

$$\begin{cases} a = \text{Re}(z) \text{ est la partie réelle de } z \\ b = \text{Im}(z) \text{ est la partie imaginaire de } z \end{cases}$$

* Si $z = a + i\,b$ est la forme algébrique de z, alors le point M (a , b) est appelé image de z dans le plan complexe P.
* Si $M(x,y) \in P$ alors le nombre complexe $x + i\,y$ est l'affixe du point M.
Il est noté : $\text{aff}(M) = Z_M$
* Pour tous points A et B du plan on a $\text{aff}\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$
* Pour tous réels α et β et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a

$$\text{aff}\left(\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}\right) = \alpha\,\text{aff}\left(\vec{u}\right) + \beta\,\text{aff}\left(\vec{v}\right)$$

* Soit $z = a + i\,b$ où a et b sont deux réels, on appelle conjugué de z, le complexe $\overline{z} = a - i\,b$

On a : $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z\,.\,z'} = \overline{z}\,.\,\overline{z'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$

et $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ et $(z \neq 0)$.

* Soit $z = a + i\,b$ où a et b sont deux réels .
On a : $z + \overline{z} = 2a$; $z - \overline{z} = 2ib$ et $z\,.\,\overline{z} = a^2 + b^2$

Formes Trigonométrique et Exponentielle d'un nombre complexe

* Soit $z = a + i\,b \in \mathbb{C}^*$ et M son image dans le plan complexe P muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On appelle module de z le réel positif défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$

Pour tous points A et B du plan on a : $AB = |z_B - z_A|$

* On a pour tous complexes z et z' :

$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ et $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

* Un argument de z est défini par $\arg(z) = \left(\widehat{\vec{u}, \vec{OM}}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

* Pour tout nombre complexe z non nul on a : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est la forme trigonométrique de z.

* Soit $z = a + ib = [r, \theta]$. On a $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$

* Pour tous complexes non nuls $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$, on a :

$\bar{z} = [r, -\theta]$ ce qui entraîne $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$z \cdot z' = [rr', \theta + \theta']$ ce qui entraîne $\begin{cases} |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \\ \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$ ce qui entraîne $\begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$ ce qui entraîne $\begin{cases} \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$z^n = [r^n, n\theta]$ ce qui entraîne $\begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$,pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Pour tout réel $\lambda > 0$, $\lambda \cdot z = [\lambda r, \theta]$ ce qui entraîne :

$\begin{cases} |\lambda \cdot z| = \lambda |z| \\ \arg(\lambda \cdot z) = \arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Pour tout réel $\lambda < 0$, $\lambda.z = [-\lambda r, \theta + \pi]$ ce qui entraîne :

$$\begin{cases} |\lambda . z| = -\lambda |z| \\ \arg(\lambda . z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

* Soit z un nombre complexe, on a :
z est réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $z = 0$.

z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$ et $z \neq 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$ et $z \neq 0$

$\Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$;
(Formule de Moivre)

* L'écriture $z = re^{i\theta}$ (où r est le module de z et θ un argument de z) est la forme exponentielle de z.

* Pour tout réel θ, on a $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$ et $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$
(Formules d'Euler)

Soient $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $r' \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$. Soit n un entier relatif. On a :

$\overline{z} = re^{-i\theta}$; $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$; $z.z' = r.r'e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$; $z^n = r^n e^{in\theta}$

Colinéarité et Orthogonalité de deux vecteurs du plan complexe

* Pour tous points A, B, C et D du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, on a :

$$\left(\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

* Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixes respectives z et z'.
On a :

$\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\right) \Leftrightarrow \dfrac{z}{z'}$ est réel

$\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}\right) \Leftrightarrow \dfrac{z}{z'}$ est imaginaire pur

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$. Soient les points M, M_1, M_2 et M' d'affixes respectives les nombres complexes :

$z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $z_1 = z^2$, $z_2 = 2z$ et $z' = 2z - z^2$

En utilisant un logiciel de construction géométrique :

* Construire le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
* Placer un point M(z) sur l'arc de sens direct $[\widehat{AB}]$.
* Construire les points M_1 et M_2 correspondants.
* Construire le point M' de sorte que le quadrilatère OM_1M_2 M' soit un parallélogramme.
* Construire la tangente (D_M) à $\mathscr{C}$ en M.
* Faire varier le point M sur l'arc$[\widehat{AB}]$. Quelle conjecture peut-on émettre sur les positions des points A et M' par rapport à la droite (D_M) ?
* Déterminer graphiquement la valeur de θ pour que le quadrilatère OM_1M_2 M' soit un rectangle.

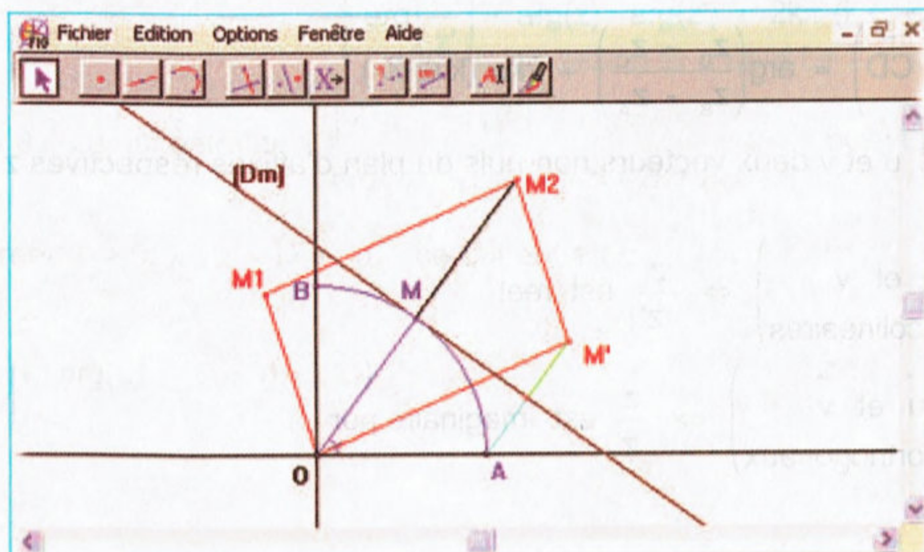
Une stratégie de justification de la conjecture :

a) Montrer que AM = MM'.

b) Montrer que $\frac{z' - 1}{z}$ est un réel.

c) Justifier alors la conjecture.

d) Déterminer la valeur de θ pour que le quadrilatère OM_1M_2 M' soit un rectangle.



EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique.
$\frac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}}$, $(-1-i)^2(1-i\sqrt{3})$, $(\frac{1}{i}+i)$ et $(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$

2 Soit le nombre complexe
$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

1) Calculer j^2, j^3 et j^4
2) Que peut-on conjecturer pour j^n pour n entier naturel non nul ?
3) Montrer que $j^2 = \overline{j} = \frac{1}{j}$
4) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
5) Démontrer que , quels que soient les complexes a, b et c on a l'équivalence
$a + bj + cj^2 = 0 \Leftrightarrow a - c = j(c - b)$

3 Pour tout nombre réel m, on pose
$z=(m-i)[(10-m) + (2+m)i]$
1) Déterminer m pour que z soit réel.
2) Préciser, dans ces cas, les valeurs correspondantes de z.

4 Soient les nombres complexes suivants : $z_1 = 4 + 4i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
1) Déterminer le module et un argument de chacun des complexes z_1 et z_2
2) En déduire le module et un argument de chacun des complexes
z_1^2, z_1z_2, z_1^3, $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_2}{z_1}$

5 Soit φ un réel de $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$. On donne le complexe $Z = \cos^2\varphi + i\sin\varphi\cos\varphi$
1) Déterminer φ pour que Z soit nul.
2) Ces valeurs étant exclues, déterminer les formes algébrique, trigonométrique et exponentielle de $\frac{1}{Z}$.

6 Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan complexe, on note M_1, M_2 et M les points d'affixes respectives
$z_1 = e^{i\theta} - i$; $z_2 = e^{-i\theta} + i$ et $z = 2\cos\theta$
1) Ecrire z_1 sous forme exponentielle, en déduire que $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$.
2) Montrer que le quadrilatère OM_1MM_2 est un losange et préciser la valeur de θ pour laquelle ce quadrilatère est un carré.

7 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé.
On donne le point M d'affixe z.
1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z| = |z - 1|$
2) Montrer que si $|z| = |z - 1|$ alors
$\text{Arg}(z) + \text{Arg}(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

8 Soit $z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$
1) Déterminer le module et un argument de z.
2) Ecrire z sous forme algébrique.
3) En déduire $\text{tg}(\frac{\pi}{12})$

9 Dans le plan complexe on considère un triangle ABC et a, b et c les affixes respectives des points A, B et C. On note M le milieu du segment [BC] et m l'affixe de M. On construit les triangles BAB' et C'AC de sorte qu'ils soient directs, rectangles et isocèles de sommet principal A.
1) Déterminer les affixes des points B', C' et M.
2) En déduire que :
a) B'C' = 2.AM
b) Les droites (B'C') et (AM) sont perpendiculaires.

10 Dans le plan complexe, on considère les points A(i), B(-i). à tout point M($\neq$B) d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{1 - z}{1 - iz}$

1) a) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left| z' \right| = 1$

2) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $z' + i = \dfrac{-1 + i}{z + i}$

b) En déduire que BM. BM' $= \sqrt{2}$.

c) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

3) a) Montrer que si $M \in \zeta_{(B,3)}$ alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on déterminera.

b) Montrer que si M $\in$ (AB) alors M' appartient à une droite à préciser.

11 1)Calculer cos3x et sin5x en fonction de cos x et sin x .

2) Linéariser les expressions suivantes : $\cos^3 x$, $\cos^2 x . \sin x$, $\sin^2 x \cos^3 x$.

3) Soient α et β deux réels. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{e^{i\alpha} - e^{i\beta}}$ (on donnera, au préalable, une condition pour que z soit défini.)

12 Soient les points A et B d'affixes respectives 1 et (- 2 i) et f l'application de P\{B} dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \dfrac{\overline{z} + 4i}{\overline{z} - 2i}$

1) Vérifier que $z' - 1 = \dfrac{6i}{\overline{z} - 2i}$

2) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$

13 Soit le point A(1). A tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que $z' = 2z - z^2$

1) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M(z) tels que $\arg\left(z'\right) - 2\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$

2) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z^2 et 2z.

a) Trouver l'ensemble E_2 des points M(z) tels que O, M_1, M_2 soient alignés

b) On suppose que $M(z) \notin E_2$.
Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme.

14 Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan complexe tels que les points d'affixes respectives 1, z, et z^2 soient alignés.

15 Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que le nombre complexe $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$ soit un réel positif.

16 Soit le nombre complexe
$$Z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}.$$

1) a) Vérifier que $Z^5 - 1 = 0$

b) En utilisant la formule $Z^5 - 1 = (Z-1)(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1)$,montrer que $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$

2) a) Exprimer Z^4, Z^3 et Z^2 sous forme trigonométrique.

b) Démontrer les égalités
$$Z + Z^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5} \quad \text{et} \quad Z^2 + Z^3 = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

3) a) Établir la relation :

$$2\cos\frac{4\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}+1=0$$

b) En déduire de ce qui précède que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4X^2+2X-1=0$

c) Déterminer alors la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

17 P étant le plan complexe. Soient les deux points A(i) et $B\left(\frac{1+i}{2}\right)$.

Soit l'application f qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que z' = (1- i) z -1.

1) a) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que $|z'| = 2\sqrt{2}$.

b) Soit $\theta\in[0, \pi]$. On suppose que $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(\text{Cos}\,\theta + i\,\text{Sin}\,\theta)$.

Déterminer suivant les valeurs de θ, la forme trigonométrique de z'.

2) a) On suppose M ≠ B. Montrer que $\text{Arg}(z') \equiv -\frac{\pi}{4}+\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{BM}}\right)\ [2\pi]$

b) En déduire l'ensemble F des points M(z) tels que z' soit réel négatif et le construire.

3) a) On suppose M ≠ A. Montrer que le triangle AMM' est rectangle en M et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right)$.

b) En déduire une construction du point M' = f(M) connaissant M dans P.

18 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on désigne par A et B les points d'affixes respectives i et 2.

A tout point M du plan d'affixe z (z ≠ 2) on associe le point M' d'affixe z' défini par $z'=\frac{z-i}{iz-2i}$

1) a- Montrer que $|z'|=\frac{AM}{BM}$

b- En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment [AB], le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

2) On suppose z ≠ i et z ≠ 2.

a- Montrer que :

$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}) - \frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

b- En déduire, que si M appartient à la droite (AB) le point M' appartient à une droite que l'on déterminera.

(D'après Bac Tunisien 1995).

19 Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique et t est l'affixe d'un point M du cercle $\mathscr{C}$, t est un nombre complexe ayant pour argument un réel α de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Soit $u = t^3$ et $v = 2t$.
Ecrire chacun des nombres complexes u et v sous forme trigonométrique.

2) Soit $w = 2t - t^3$ et A, B et C les points d'affixes respectives u, v et w.

a. Placer, dans le plan P, les points A, B et C dans le cas où α est égal à $\frac{\pi}{3}$.

b. Déterminer les réels α pour lesquels les points O, A et B sont alignés.

3) On suppose, dans la suite, que α appartient à l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a. Quelle est la nature du quadrilatère OABC ?

b. Déterminer le réel α pour que le quadrilatère OABC soit un rectangle.

(D'après Bac Tunisien 1994).

Exercice n° 1

- $$\frac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3}).(-i+\sqrt{3})}{(i+\sqrt{3}).(-i+\sqrt{3})} = \frac{-i+\sqrt{3}+\sqrt{3}+3i}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

- $(-1-i)^2.(1-i\sqrt{3}) = 2i(1-i\sqrt{3})$
  $=2i + 2\sqrt{3}$
- $\frac{1}{i} + i = -i + i = 0$
- $$(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = (-\frac{1}{2})^3 + 3(-\frac{1}{2})^2(i\frac{\sqrt{3}}{2}) + 3(-\frac{1}{2})(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$$
  $$= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Donc : $\boxed{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = 1}$

Exercice n° 2

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

● 1) ▪ $j^2 = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^2$

$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

Formule de Moivre

Par suite on a : $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$

▪ $j^3 = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^3$

$= \cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$

$= 1$

Formule de Moivre

Par suite on a : $j^3 = 1$

▪ $j^4 = j^3 x j = 1 x j = j$

2) Si $n = 3p$ alors $j^n = (j^3)^p = 1$, $p \in \mathbb{N}$

Si $n = 3p + 1$ alors $j^n = j^{3p} x j = j$, $p \in \mathbb{N}$

Si $n = 3p + 2$ alors $j^n = j^{3p} x j^2 = j^2 = \overline{j}$, $p \in \mathbb{N}$

● On a : $j^3 = 1$ donc $j^2 x j = 1$ et par suite $j^2 = \frac{1}{j}$

Or d'après la question 1) on a $j^2 = \overline{j}$

il en résulte : $j^2 = \overline{j} = \frac{1}{j}$

● $1 + j + j^2 = 1 + (j + \overline{j}) = 1 + 2\mathrm{Re}(j)$
$= 1 + 2 x(-\frac{1}{2}) = 1 - 1 = 0$

● $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

On sait que : $1 + j + j^2 = 0$ donc $j^2 = -1 - j$ d'où

$a + bj + cj^2 = a + bj + c(-1 - j) = a + bj - c - jc$
$= a - c + (b - c)j$

Donc $a + bj + cj^2 = 0 \Leftrightarrow a - c + (b - c)j = 0$

$\Leftrightarrow a - c = (c - b)j$

Exercice n° 3

$z = (m - i).[(10 - m) + (2 + m) i]$, $m \in \mathbb{R}$

● On a : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$

$z = m.(10-m) + m(2 + m) i - i.(10 - m) + 2 + m$
$= m.(10-m) + 2 + m + i.[m(2 + m) -.(10 - m)]$

Donc $\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow m(2 + m) -.(10 - m) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0$

Résolution de l'équation : $m^2 + 3m - 10 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 x(-10) = 49$ et $\sqrt{\Delta} = 7$

l y a deux valeurs du réel m tel que z est réel

ui sont : $m_1 = \frac{-3+7}{2} = 2$ et $m_2 = \frac{-3-7}{2} = -5$

● pour $m = 2$ on a $z = 20$
Pour $m = -5$ on a $z = -78$

Exercice n° 4

$z_1 = 4 + 4i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

- $|z_1| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Soit θ un argument de z_1, on a :

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Donc : $|z_1| = 4\sqrt{2}$ et $\text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{4}$

De même on a :

$|z_2| = \sqrt{^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

Soit θ un argument de z_2, on a :

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Donc : $|z_2| = 2$ et $\text{Arg } z_2 = -\frac{\pi}{3}$

- $(z_1)^2 = [4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]^2 = [(4\sqrt{2})^2, 2\text{x}\frac{\pi}{4}]$

$= [32, \frac{\pi}{2}]$

- $|z_1 \text{x } z_2| = |z_1| \text{x } |z_2| = 4\sqrt{2} \text{x} 2 = 8\sqrt{2}$

$\text{Arg}(z_1 \text{x } z_2) \equiv \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$\text{Arg}(\frac{z_1}{z_2}) \equiv \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

- $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$ et $\text{Arg}(\frac{1}{Z}) \equiv -\text{Arg}(Z)\ [2\pi]$

Donc comme $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{\frac{z_1}{z_2}}$ il résulte que :

$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\text{Arg}(\frac{z_2}{z_1}) \equiv -\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

Exercice n° 5

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $Z = \cos^2\varphi + i\sin\varphi.\cos\varphi$

- $Z=0 \Leftrightarrow \text{Re}Z = 0$ et $\text{Im}Z = 0$

Donc Z est nul si et seulement si : $\cos^2\varphi = 0$ et $\sin\varphi.\cos\varphi = 0$ d'où $Z=0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0$

$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Or comme $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on aura : $\varphi = \frac{\pi}{2}$

2) $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$

- Ecriture algébrique de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos^2\varphi + i\sin\varphi.\cos\varphi} = \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^2\varphi.\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^2\varphi.\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}}$$

$$= \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= 1 - i\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi}$$

Donc : $\frac{1}{Z} = 1 - i\text{tg}\varphi$

- Ecriture trigonométrique de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = 1 - i\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} - i\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Comme $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\cos\varphi > 0$

D'où $\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$

- Ecriture exponentielle de $\frac{1}{Z}$:

$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}e^{-i\varphi},\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[}$$

Exercice n° 6

$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $z_1 = e^{i\theta} - i$ et $z_2 = e^{-i\theta} + i$

●

- $z_1 = e^{i\theta} - i = e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_1 = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}[e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} - e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}]$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}[2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)]$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}[-i\,2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)]$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} \times 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})$

Donc : $\boxed{z_1 = 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}$

- On a : $z_2 = e^{-i\theta} + i = \overline{e^{i\theta} - i} = \overline{z_1}$

Donc : $\boxed{z_2 = 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}$

Par suite on aura :

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}} = e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$

Finalement on a $\boxed{\frac{z_2}{z_1} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}}$

● aff$(\overrightarrow{OM_1}) = z_1 = e^{i\theta} - i$

aff$(\overrightarrow{M_2M}) = z - z_2 = 2\cos\theta - (e^{-i\theta} + i)$

$= 2\cos\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) - i$

$= \cos\theta + i\sin\theta - i = e^{i\theta} - i = z_1$

Donc $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_2M}$ ce qui donne : OM_1MM_2 est un parallélogramme (1)

Et comme $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \left|e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}\right| = 1$ alors on a

$|z_1| = |z_2| \Rightarrow OM_1 = OM_2$ (2)

Conclusion : d'après les résultats (1) et (2) le quadrilatère OM_1MM_2 est un losange

- OM_1MM_2 est un losange pour qu'il soit un carré
Il suffit que : (OM_1) et (OM_2) soient perpendiculaires

Donc on doit avoir : $\frac{aff(\overrightarrow{OM_2})}{aff(\overrightarrow{OM_1})}$ imaginaire pur

Or $\frac{z_2}{z_1} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ est un imaginaire pur

Si et seulement si : $\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Donc : $\theta = -k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et on a $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Pour k = 0 on aura $\boxed{\theta = 0}$

Exercice n° 7

M d'affixe z

● posons $z = x + iy$ on a $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|z-1| = |x-1+iy| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

Donc

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Conclusion : l'ensemble des points M tels que $|z| = |z-1|$ est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$

2eme méthode

Soit I le point d'affixe $z_I = 1$ on a :

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow |z-0| = |z-z_I|$

$\Leftrightarrow$ OM = IM : donc M décrit la médiatrice du segment [OI]

● $|z| = |z-1| \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + iy, y \in \mathbb{R}$

Or on a: $\text{Arg}(z)+\text{Arg}(z-1) \equiv \text{Arg}[z.(z-1)]\ [2\pi]$

Et puisque : $z.(z-1) = (\frac{1}{2} + iy).(\frac{1}{2} + iy - 1)$

$= (\frac{1}{2} + iy).(-\frac{1}{2} + iy)$

$= -\frac{1}{4} - y^2 < 0$

C'est adire : z . (z – 1) est un réel strictement négatif donc son Arg est π

Ce qui prouve que : $\text{Arg}(z)+\text{Arg}(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Conclusion :

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Exercice n° 8

● $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\text{Arg}(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

• $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $\text{Arg}(1+i\sqrt{3}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Donc $Z = \dfrac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right]$

$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]$

$$\boxed{Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]}$$

● $Z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{1^2 + \sqrt{3}^2}$

$= \dfrac{1 - i\sqrt{3} + i + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\boxed{Z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}}$

● $Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$

Comme deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire on aura :

$\cos(-\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\sin(-\frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

Par suite $\text{tg}\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\boxed{\text{tg}\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice n° 9

• $m = \dfrac{b+c}{2}$

● Soient: $z_{B'} = b'$ et $z_{C'} = c'$ les affixes respectivement des points B' et C'

On a : BAB' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ AB' = AB \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ |z_B - z_A| = |z_{B'} - z_A| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{b-a}{b'-a} = i$

$\Leftrightarrow b - a = i(b' - a) \Leftrightarrow b - a + ia = i b'$

En multipliant la dernière égalité par (– i) on aura :

$\boxed{b' = -ib + a(1+i)}$

De même le triangle ACC' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc

$$\begin{cases} (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AC' = AC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}(\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{c'-a}{c-a} = i$

$\Leftrightarrow c' - a = i(c - a) \Leftrightarrow c' = ic - ia + a$

Donc : $\boxed{c' = ic + a(1-i)}$

●

a) $B'C' = |c' - b'| = |(ic + a - ia) - (-ib + a + ia)|$

$= |i(c+b) - 2ia|$

$= |i| . |c + b - 2a|$

Comme $|i| = 1$ on aura $B'C' = |c + b - 2a|$

Aussi on a: $2AM = 2|m - a| = 2\left|\frac{b+c}{2} - a\right|$

$= \left|2x(\frac{b+c}{2} - a)\right|$

$= |b + c - 2a| = B'C'$

Conclusion :

$B'C' = 2AM$

b) On a : $\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2ia - i(b+c)}{\frac{b+c}{2} - a}$

$= \frac{i(2a - b - c)}{\frac{b+c-2a}{2}}$

$\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2i(2a-b-c)}{b+c-2a} = \frac{-2i(b+c-2a)}{b+c-2a}$

$= -2i$

donc $\frac{aff(\overrightarrow{B'C'})}{aff(\overrightarrow{AM})}$ est un imaginaire pur par suite les droites (B'C') et (AM) sont perpendiculaires

Exercice n° 10 (à rectifier A(1))

$Z_A = 1$, $Z_B = -i$, $Z_M = z$ et $Z_{M'} = z' = \frac{1-z}{1-iz}$

● a) $z' = \frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-z}{i(-i-z)} = -i(\frac{z-1}{z-(-i)})$

z' est réel $\Leftrightarrow Z' = 0$ ou $\text{Arg}z' = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \text{Arg}[-i(\frac{z-1}{z-(-i)})] = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

$\Leftrightarrow \text{Arg}(-i) + \text{Arg}(\frac{z-1}{z-(-i)}) = k\pi$ ou Z=1

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\frac{z-z_A}{z-z_B}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

D'où M décrit le cercle de diamètre [AB] privé de B .

b) $|z'| = \left|\frac{1-z}{1-iz}\right| = \left|(-i)(\frac{z-1}{z-(-i)})\right|$

$= |-i| . \left|\frac{z-1}{z-(-i)}\right| = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|$ car $|-i| = 1$

donc $|z'| = \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = \frac{AM}{BM}$

Par suite $|z'| = 1$ si et seulement si AM = BM

Dans ce cas M décrit la médiatrice du segment [AB]

2eme méthode

Soit I le point d'affixe $z_I = 1$ on a :

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow |z-0| = |z - z_I|$

$\Leftrightarrow$ OM = IM : donc M décrit la médiatrice du segment [OI]

● $|z| = |z-1| \Longleftrightarrow z = \frac{1}{2} + iy, y \in IR$

Or on a: $Arg(z)+Arg(z-1) \equiv Arg[z.(z-1)]\ [2\pi]$

Et puisque : $z.(z-1) = (\frac{1}{2}+iy).(\frac{1}{2}+iy-1)$

$= (\frac{1}{2}+iy).(-\frac{1}{2}+iy)$

$= -\frac{1}{4} - y^2 < 0$

C'est adire : z . (z – 1) est un réel strictement négatif donc son Arg est π

Ce qui prouve que : $Arg(z)+Arg(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Conclusion :

$|z| = |z-1 \Leftrightarrow Arg(z) + Arg(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Exercice n° 8

● $|1+i| = \sqrt{2}$ et $Arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

• $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $Arg(1+i\sqrt{3}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc $Z = \dfrac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right]$

$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]$

$$\boxed{Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]}$$

● $Z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{1^2 + \sqrt{3}^2}$

$= \dfrac{1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\boxed{Z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}}$

● $Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$

Comme deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire on aura :

$\cos(-\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\sin(-\frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

Par suite $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice n° 9

• $m = \dfrac{b+c}{2}$

● Soient: $z_{B'} = b'$ et $z_{C'} = c'$ les affixes respectivement des points B' et C'

On a : BAB' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AB' = AB \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Arg(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ |z_B - z_A| = |z_{B'} - z_A| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Arg(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left| \frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A} \right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{b-a}{b'-a} = i$

$\Leftrightarrow$ b – a = i (b' – a) $\Leftrightarrow$ b – a + ia = i b'

En multipliant la dernière égalité par (– i) on aura :

$\boxed{b' = -ib + a(1+i)}$

De même le triangle ACC' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AC' = AC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Arg(\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left| \frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{c'-a}{c-a} = i$

$\Leftrightarrow$ c' – a = i (c – a) $\Leftrightarrow$ c' = i c – ia + a

Donc : $\boxed{c' = ic + a(1-i)}$

●

a) $B'C' = |c' - b'| = |(ic + a - ia) - (-ib + a + ia)|$

$= |i(c+b) - 2ia|$

$= |i| . |c + b - 2a|$

Comme $|i| = 1$ on aura $B'C' = |c + b - 2a|$

Aussi on a: $2AM = 2|m - a| = 2\left|\frac{b+c}{2} - a\right|$

$= \left|2x(\frac{b+c}{2} - a)\right|$

$= |b + c - 2a| = B'C'$

Conclusion :

B'C' = 2AM

b) On a : $\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2ia - i(b+c)}{\frac{b+c}{2} - a}$

$= \frac{i(2a-b-c)}{\frac{b+c-2a}{2}}$

$\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2i(2a-b-c)}{b+c-2a} = \frac{-2i(b+c-2a)}{b+c-2a}$

$= -2i$

donc $\frac{aff(\overrightarrow{B'C'})}{aff(\overrightarrow{AM})}$ est un imaginaire pur par suite les droites (B'C') et (AM) sont perpendiculaires

Exercice n° 10 (à rectifier A(1))

$Z_A = 1$, $Z_B = -i$, $Z_M = z$ et $Z_{M'} = z' = \frac{1-z}{1-iz}$

● a) $z' = \frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-z}{i(-i-z)} = -i(\frac{z-1}{z-(-i)})$

z' est réel $\Leftrightarrow$ Z'=0 ou Argz' = k π ,k ∈ ℤ

$\Leftrightarrow$ $Arg[-i(\frac{z-1}{z-(-i)})] = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

$\Leftrightarrow$ $Arg(-i) + Arg(\frac{z-1}{z-(-i)}) = k\pi$ ou Z=1

$\Leftrightarrow$ $-\frac{\pi}{2} + Arg(\frac{z-z_A}{z-z_B}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

$\Leftrightarrow$ $-\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

$\Leftrightarrow$ $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou Z=1

D'où M décrit le cercle de diamètre [AB] privé de B .

b) $|z'| = \left|\frac{1-z}{1-iz}\right| = \left|(-i)(\frac{z-1}{z-(-i)})\right|$

$= |-i| . \left|\frac{z-1}{z-(-i)}\right| = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|$ car $|-i| = 1$

donc $|z'| = \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = \frac{AM}{BM}$

Par suite $|z'| = 1$ si et seulement si AM = BM Dans ce cas M décrit la médiatrice du segment [AB]

● a) $z \neq -i$, on a :

$z' + i = \frac{1-z}{1-iz} + i = \frac{1-z+i(1-iz)}{1-iz} = \frac{1-z+i+z}{1-iz}$

$= \frac{1+i}{(-i)(z+i)} = \frac{-1+i}{z+i}$

D'où $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$

b) On a pour $z \neq -i$: $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$

Donc $(z'+i)(z+i) = -1+i$

$\Leftrightarrow |(z'+i)(z+i)| = |-1+i|$

$\Leftrightarrow |(z'+i)|.|(z+i)| = |-1+i|$

$\Leftrightarrow |(z'-(-i)|.|z-(-i)| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(z'-z_B|.|z-z_B| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow BM'xBM = \sqrt{2}$

c) M décrit le cercle de centre B et de rayon 1

Signifie que : BM = 1 et comme $BM'xBM = \sqrt{2}$

Alors on aura $BM' = \sqrt{2}$ d'où le point M'

décrit le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$

Exercice n° 11

● • On sait que : $\cos 3x = \text{Rel}(e^{i3x})$

Or on a : $e^{i3x} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3$

$e^{i3x} = \cos^3 x + 3i\cos^2 x.\sin x - 3\cos x.\sin x - i\sin^3 x$

$= \cos^3 x - 3\cos x.\sin x + i(3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x)$

Donc : $\boxed{\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x.\ \sin x}$

• On sait que : $\sin 5x = \text{Im}(e^{i5x})$

Or on a : $e^{i5x} = (e^{ix})^5 = (\cos x + i\sin x)^5$

$e^{i5x} = \cos^5 x + 5i\cos^4 x.\sin x - 10\cos^3 x.\sin^2 x - 10i\cos^2 x.\sin^3 x + 5\cos x.\sin^4 x + i\sin^5 x$

Donc :

$\boxed{\sin 5x = 5\cos^4 x.\sin x - 10\cos^2 x.\sin^3 x + \sin^5 x}$

● $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$

$= \frac{e^{i3x} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8}$

$= \frac{1}{4}.\frac{e^{i3x}+e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4}.\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

Par suite :

$\boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x}$

• $\cos^2 x.\sin x = (1 - \sin^2 x).\sin x = \sin x - \sin^3 x$

or on a :

$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$= \frac{e^{i3x} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}}{-8i}$

$= -\frac{1}{4}.\frac{e^{i3x}-e^{-3ix}}{2i} + \frac{3}{4}.\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$= -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

D'où : $\cos^2 x.\sin x = \sin x - (-\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x)$

$\boxed{\cos^2 x.\sin x = \frac{1}{4}(\sin x + \sin 3x)}$

• $\sin^2 x.\cos^3 x = (1-\cos^2 x).\cos^3 x = \cos^3 x - \cos^5 x$

on a déjà: $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

Linéarisons : $\cos^5 x$

$\text{Cos}^5 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 =$

$\frac{e^{i5x} + 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} + 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} + e^{-i5x}}{32}$

$= \frac{1}{16}.\frac{e^{i5x}+e^{-5ix}}{2} + \frac{5}{16}.\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{10}{16}.\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$= \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x$

$\sin^2 x.\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x - (\frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x)$

$= -\frac{1}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$

● $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$

$Z = \frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}$ est définit si $e^{i\alpha} - e^{i\beta} \neq 0$ c'est à dire

$e^{i\alpha} \neq e^{i\beta}$ donc pour $\alpha \neq \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

On a : $\frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{e^{i\alpha}-e^{i\beta}} = \frac{e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})}\left(e^{i(\frac{\alpha-\beta}{2})} + e^{-i(\frac{\alpha-\beta}{2})}\right)}{e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})}\left(e^{i(\frac{\alpha-\beta}{2})} - e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})}\right)}$

$$=\frac{e^{-i(\frac{\beta-\alpha}{2})}+e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})}}{e^{-i(\frac{\beta-\alpha}{2})}-e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})}}=\frac{2\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{-2i\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

Conclusion : $Z = i\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$; $\frac{\beta-\alpha}{2} \neq k\pi$

- si on a : $\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2}) > 0$ alors :

$\text{Arg}(Z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|Z| = \cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$

- si on a : $\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2}) < 0$ alors :

$\text{Arg}(Z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|Z| = -\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$

Exercice n° 12

$z_a = 1$, $z_B = -2i$ et $z' = \frac{\bar{z}+4i}{\bar{z}-2i}$

- $z' - 1 = \frac{\bar{z}+4i}{\bar{z}-2i} - 1$

$$=\frac{\bar{z}+4i-\bar{z}+2i}{\bar{z}-2i}=\frac{6i}{\bar{z}-2i}$$

- on a : $z' - 1 = \frac{6i}{\bar{z}-2i}$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(z'-1) \equiv \text{Arg}(\frac{6i}{\bar{z}-2i})\ [2\pi]$

Comme $\text{Arg}(\frac{a}{b}) \equiv \text{Arg}\, a - \text{Arg} b\ [2\pi]$

alors

$\text{Arg}(z'-1) \equiv \text{Arg}(6i) - \text{Arg}(\bar{z}-2i)\ [2\pi]$

On sait que : $\overline{z+2i} = \bar{z}-2i$ donc on a

$\text{Arg}(z'-z_A) \equiv \frac{\pi}{2} - \text{Arg}(\overline{z+2i})\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(z'-z_A) \equiv \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(z+2i)\ [2\pi]$

Car $\text{Arg}\,\bar{a} \equiv -\text{Arg}(a)\ [2\pi]$

Il en résulte que :

$\text{Arg}(z'-z_A) - \text{Arg}(z-z_B) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(\frac{z'-z_A}{z-z_B}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

- a) $M \in \zeta(B,3) \Leftrightarrow BM = 3$

$\Leftrightarrow |z - z_B| = 3 \Leftrightarrow |z+2i| = 3$

$\Leftrightarrow |\overline{z+2i}| = 3$ (car $|\bar{a}| = |a|$)

$\Leftrightarrow |\bar{z} - 2i| = 3$

Or on a : $|z'-1| = |\frac{6i}{\bar{z}-2i}| = \frac{|6i|}{|\bar{z}-2i|}$

Donc $|z'-1| = \frac{6}{3} = 2$

Donc : $|z' - z_A| = 2$ par suite : $AM' = 2$

Conclusion : **L'ensemble des points M' est le cercle ζ ' de centre A et de rayon 2**

b) $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\quad k \in \mathbb{Z}$

$\in (AB) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AB}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Par suite : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : **M' décrit la droite qui passe par A et perpendiculaire à La droite (AB)**

Exercice n° 13

$z_a = 1$ et $z' = 2z - z^2$

- on a pour $z \neq 0$:

$\text{Arg}(z') - 2\,\text{Arg}(z) \equiv \text{Arg}(z') - \text{Arg}(z^2)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}(\frac{z'}{z^2})\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}(\frac{2z-z^2}{z^2})\ [2\pi]$

$\text{Arg}(z') - 2\,\text{Arg}(z) \equiv \text{Arg}(\frac{-z(z-2)}{z^2})\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}(\frac{z-2}{z}) + \pi\ [2\pi]$

Donc on aura :

$\text{Arg}(z') - 2\,\text{Arg}(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow$

$\text{Arg}(\frac{z-2}{z}) + \pi \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

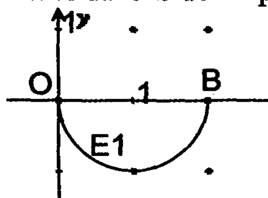
$\Leftrightarrow$

$\text{Arg}(\frac{z-2}{z}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, posons B le point d'affixe 2

$\Leftrightarrow \text{Arg}(\frac{z-z_B}{z-z_O}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BM}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Finalement l'ensemble E_1 des points M est le demi-cercle de diamètre[OB] privé de O et B situés dans le demi plan $y \le 0$



● a) O, M_1 et M_2 sont alignéssi et seulement si : $\frac{aff(\overrightarrow{OM_1})}{aff(\overrightarrow{OM_2})}$ est réel

- si $z = 0$ alors $M_1 = M_2 = O$
- Si $z \neq o$ on aura: $\frac{z^2}{2z}$ est réel donc $\frac{z}{2}$ est réel

C'est-à-dire z est un réel par suite **l'ensemble E_2 des points M tels que O , M_1 et M_2 sont alignés est la droite des abscisses**

b) pour tout z non réel on a :

$aff(\overrightarrow{OM_1}) = z_1 = z^2$

$aff(\overrightarrow{M'M_2}) = z_2 - z' = 2z - (2z - z^2) = z^2$

D'où : $aff(\overrightarrow{OM_1}) = aff(\overrightarrow{M'M_2})$ donc

$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M'M_2}$

Par suite OM_1M_2M' est un parallélogramme

Exercice n° 14

*Pour z = 1 le résultat est trivial

*Pour $z \neq 1$ Les points d'affixes respectives 1, z et z^2 *sont alignés signifie* $\frac{z^2-1}{z-1}$ est réel

$\Leftrightarrow \frac{(z-1)(z+1)}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ z-1 réel $\Leftrightarrow$ z réel

Conclusion : **l'ensemble des points M(z) du plan complexe tels que les points d'affixes respectives 1, z et z^2 sont alignés est la droite des abscisses.**

Exercice n° 15

Soient r et θ le module et l'argument de $1 - i\sqrt{3}$

On a :

$r = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{3}$

D'où :

●$(1 - i\sqrt{3})^n = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^n$

$= 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 2^n(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3})$, $n \in \mathbb{N}$

On a donc : $(1 - i\sqrt{3})^n$ est un réel positif si et seulement si : $\cos\frac{n\pi}{3} \ge 0$ et $\sin\frac{n\pi}{3} = 0$ d'où n est un multiple de 6

Exercice n° 16 rectifier

$Z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

● a) $Z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ donc $Z^5 = (e^{i\frac{2\pi}{5}})^5 = e^{2i\pi} = 1$

Par suite $Z^5 - 1 = 0$

b) on a : $Z^5 - 1 = (Z-1).(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1)$

$Z \neq 1$ et $Z^5 - 1 = 0$ équvaut à: $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$

● a)On sait:$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
D'où

$Z^4 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$

$Z^3 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$

$Z^2 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$

b) d'après 2) a) on a : $Z^4 + Z = e^{i\frac{8\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}}$

$= e^{i\frac{10\pi}{10}}(e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{-i\frac{3\pi}{5}})$

$Z^4 + Z = e^{i\pi}(2\cos\frac{3\pi}{5}) = (-1).2\cos(\pi - \frac{2\pi}{5})$

$= (-1).2[-\cos(\frac{2\pi}{5})] = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$

Donc : $\boxed{Z^4 + Z = 2\cos(\frac{2\pi}{5})}$

De même on a :

$Z^2 + Z^3 = e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}}$

$= e^{i\frac{5\pi}{5}}(e^{-i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{5}})$

$= e^{i\pi}(2\cos\frac{\pi}{5}) = -2\cos\frac{\pi}{5}$

$= 2\cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = 2\cos\frac{4\pi}{5}$

Donc : $\boxed{Z^2 + Z^3 = 2\cos(\frac{4\pi}{5})}$

● a) On sait que : $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$

Donc : $1 + (Z + Z^4) + (Z^2 + Z^3) = 0$

Par suite en remplacent $(Z + Z^4)$ et $(Z^2 + Z^3)$ par les valeurs trouvées dans 2) b) on trouve :

$$1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0 \quad (\mathrm{I})$$

b) on sait que : $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

d'où $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos 2.\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$

Donc remplacent $\cos\frac{4\pi}{5}$ par $2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$ dans l'égalité (I) :

$1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$ **(II)**

Posons par suite $X = \cos(\frac{2\pi}{5})$ dans **(II)** on aura :

$$4X^2 + 2X - 1 = 0 \text{ et } X = \cos(\frac{2\pi}{5})$$

Donc $\cos(\frac{2\pi}{5})$est solution de: $4X^2 + 2X - 1 = 0$

c) Déterminant dans IR les solutions de l'équation
$4X^2 + 2X - 1 = 0$, en effet :

$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - (-4) = 5 > 0$ donc il y en a deux racines : $X' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $X'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$

On a $X' > 0$ et $X'' < 0$

Conclusion : $\boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Exercice n° 17

$z_a = i$, $z_B = \frac{1+i}{2}$ et $z' = (1-i)z - 1$

● a) $|z'| = |(1-i)z - 1| = |(1-i)(z - \frac{1}{1-i})|$

$= |1-i|.|z - \frac{1}{1-i}|$

Avec : $|1-i| = \sqrt{2}$

Et $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = z_B$

Donc : $|z'| = \sqrt{2}.|z - z_B|$

Comme $|z'| = 2\sqrt{2}$ on aura
$|z - z_B| = 2$ c'est-à-dire BM = 2

Il en résulte que M décrit le cercle ζ de centre B et de rayon 2

b) $\theta \in [0, \pi]$

pour $z = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$,on a :

$z' = (1-i)z - 1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}e^{i\theta} - 1$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $z' = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}e^{i\theta} - 1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta} - 1$

$= e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} - 1$

$$=e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}(e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}-e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})})$$

$$=2i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}).e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}$$

$$z'=\ 2\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}).e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}\quad(i=e^{i\frac{\pi}{2}})$$

$$=\ 2\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}).e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2})}$$

$$z'=2\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8})}$$

- Si : $0\le\ \theta\le\frac{\pi}{4}$ alors $-\frac{\pi}{8}\le\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\ \le 0$

Donc: $\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})\le 0$ dans ce cas :

$z'=-2\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8}-\pi)}$ car $e^{-i\pi}=-1$

D'où $z'=-2\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{8})}$

- Si : $\frac{\pi}{4}\le\ \theta\le\pi$ alors $0\le\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\ \le\frac{3\pi}{8}$

Donc: $\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})\ge 0$ dans ce cas :

$$z'=2\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8})}$$

__Conclusion__ :

Si : $\frac{\pi}{4}\le\ \theta\le\pi$ **alors**

$$\mathbf{z'=2\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}).(\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8})+i\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8}))}$$

Si : $0\le\ \theta\le\frac{\pi}{4}$ **alors**

$$\mathbf{z'=-2\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})(\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{8})+i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{8}))}$$

● a) $M\neq B$

$\text{Arg}(z')\equiv\text{Arg}[(1-i)z-1]\ \ [2\pi]$

$\equiv\text{Arg}[(1-i).(z-\frac{1}{1-i})]\ \ [2\pi]$

$\equiv\text{Arg}[(1-i).(z-\frac{1+i}{2})]\ \ [2\pi]$

voir 1) a))

$\equiv\text{Arg}(1-i)+\text{Arg}(z-z_B)\ [2\pi]$

$$Arg(z')\equiv-\frac{\pi}{4}+\left(\vec{i},\overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$$

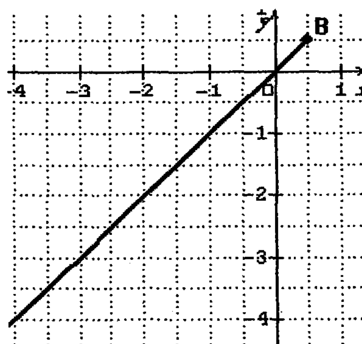
b) z' est un réel négatif donc $\text{Arg}(z')\equiv\pi\ [2\pi]$

ce qui donne $\left(\vec{i},\overrightarrow{BM}\right)-\frac{\pi}{4}\equiv\pi[2\pi]$

D'où $\left(\vec{i},\overrightarrow{BM}\right)\equiv\frac{5\pi}{4}\equiv-\frac{3\pi}{4}(2\pi)$

L'ensemble des points M noté F est la demi droite [Bt) tel que $\left(\vec{i},\overrightarrow{Bt}\right)\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

__Figure__ : Remarque :on a pour $z=0$; $z'=-1$ donc l'*ensemble F est la demi droite* [BO)



● a)

- $M\neq A$

On a : $\frac{z'-z}{z_A-z}=\frac{(1-i)z-1-z}{i-z}=\frac{z-iz-1-z}{i-z}$

$$=\frac{-1-iz}{i-z}=\frac{i(i-z)}{i-z}=i$$

(imaginaire)

Donc : $\frac{aff(\overrightarrow{MM'})}{aff(\overrightarrow{MA})}$ est un imaginaire pur par suite on aura $\overrightarrow{MM'}\perp\overrightarrow{MA}$ ce qui donne que le triangle AMM' est rectangle en M

- $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})\equiv\text{Arg}(\frac{z'-i}{z-i})[2\pi]$

Or $\frac{z'-i}{z-i}=\frac{(1-i)z-1-i}{z-i}=\frac{z-i-iz-1}{z-i}$

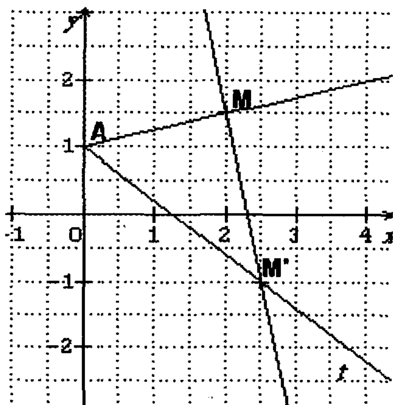
$$=\frac{z-i-i(z-i)}{z-i}=\frac{(z-i).(1-i)}{z-i}=1-i$$

Donc $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}) \equiv \text{Arg}(1-i)\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

b) On trace la demi droite [At) tel que :

$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{At}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$,la perpendiculaire en M à la la droite (AM) coupe [At) en M'



Exercice n° 18 $z_A = i$; $z_B = 2$ $z' = \frac{z-i}{iz-2i}$

● a) $|z'| = \left|\frac{z-i}{iz-2i}\right| = \left|\frac{z-i}{i(z-2)}\right|$

$= \frac{|z-i|}{|i||z-2|} = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|$ car $|i| = 1$

$= \frac{AM}{BM}$

b) lorsque M décrit la médiatrice du segment [AB] alors $\frac{AM}{BM} = 1$ d'où $|z'| = 1$ ce qui donne OM' = 1 par suite **M' décrit le cercle de centre O et de rayon 1**

● **$z \neq i$ et $z \neq 2$**

a) On a : $\text{Arg}(z') \equiv \text{Arg}\left(\frac{z-i}{iz-2i}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}\left(\frac{z-i}{i(z-2)}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}\left(\frac{1}{i}.\frac{z-i}{z-2}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}\left(\frac{1}{i}\right) + \text{Arg}\left(\frac{z-i}{z-2}\right)\ [2\pi]$

Donc $\text{Arg}(z') \equiv -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z-i}{z-2}\right)\ [2\pi]$

$\text{Arg}(z'-z_O) \equiv -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)\ [2\pi]$

D'où :

$(\vec{U},\overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}) - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) $M \in (AB) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d'où $(\vec{U},\overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : **Le point M' appartient à la droite des ordonnées**

Exercice n° 19 **$M \in \zeta(O,1)$, aff (M) = t**

● on a : $|t| = OM = 1$, donc $t = e^{i\alpha}$

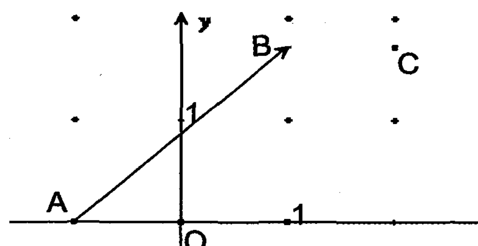
$u = t^3 = e^{i3\alpha} = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$

$v = 2t = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

● a) pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$z_A = -1$, $z_B = 1 + i\sqrt{3} = \left[2,\frac{\pi}{3}\right]$

$z_C = v - u = z_B - z_A$ donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$



b) O, A et B sont alignés ssi : $\frac{aff(\overrightarrow{OA})}{aff(\overrightarrow{OB})}$ réel

Donc $\frac{z_A}{z_B} = \frac{u}{v} = \frac{t^3}{2t} = \frac{t^2}{2}$ est réel

Or $\frac{t^2}{2} = \frac{e^{2i\alpha}}{2}$ est réel ssi $2\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, or $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Donc pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ les points O , A et B sont alignés

Conclusion: O, A et B sont alignés pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$

● $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

a)

aff ($\overrightarrow{OC}$)= z_C = w et aff ($\overrightarrow{AB}$) = v – u = w

Donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ par suite OABC est un parallélogramme

b) pour que OABC soit un rectangle il suffit que (OA) ⊥ (OC) donc : $\frac{aff(\overrightarrow{OC})}{aff(\overrightarrow{OA})}$ imaginaire

$\Leftrightarrow \frac{2t - t^3}{t^3} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow (\frac{2}{t^2} - 1) \in i\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow 2e^{-2i\alpha} - 1 \in i\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow (2\cos 2\alpha - 1 - 2i \sin 2\alpha) \in i\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow 2\cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \alpha = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Comme $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on aura $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$

RÉSUMÉ DU COURS

* Soit $Z = \lambda\, e^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul avec λ réel strictement positif.
Les racines carrées du Z sont les nombres complexes opposés :
$z_1 = \sqrt{\lambda}\, .\, e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $z_2 = -z_1$
* Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe non nul écrit sous forme algébrique.
L'équation $z^2 = Z$ avec $z = x + iy$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

* Soit L'équation (E) : $a z^2 + b z + c = 0$ telle que $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$ et z l'inconnue complexe.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé discriminant de l'équation (E)
Si $\Delta \neq 0$ alors L'équation (E) admet, dans $\mathbb{C}$, deux solutions distinctes :

$z' = \dfrac{-b-\lambda}{2a}$ et $z'' = \dfrac{-b+\lambda}{2a}$ où λ est une racine carrée de Δ .

Si $\Delta = 0$ alors (E) possède une racine double $z' = z'' = \dfrac{-b}{2a}$

* Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. Si z' et z'' sont les racines dans $\mathbb{C}$ de L'équation du second degré (E) $a z^2 + b z + c = 0$ alors on a : $a z^2 + b z + c = a(z-z')(z-z'')$
* Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. Si z' et z'' sont les racines dans $\mathbb{C}$ de L'équation du second degré (E) $a z^2 + b z + c = 0$ alors on a : $\begin{cases} z' + z'' = -\dfrac{b}{a} \\ z'.z'' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Soient S et P deux nombres complexes donnés. Les nombres complexes z' et z'' tels que : $\begin{cases} z' + z'' = S \\ z'.z'' = P \end{cases}$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré $z^2 - Sz + P = 0$.

* Soient r un réel strictement positif, θ un réel et $Z = r\, e^{i\theta}$ un nombre complexe.
L'équation (E) : $z^n = Z$ avec $n \in$ IN* admet, dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes :

$z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Les nombres complexes z_k sont les racines $n^{ièmes}$ de Z.

Les images M_k des solutions z_k de (E) sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle C de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

AVEC L'ORDINATEUR

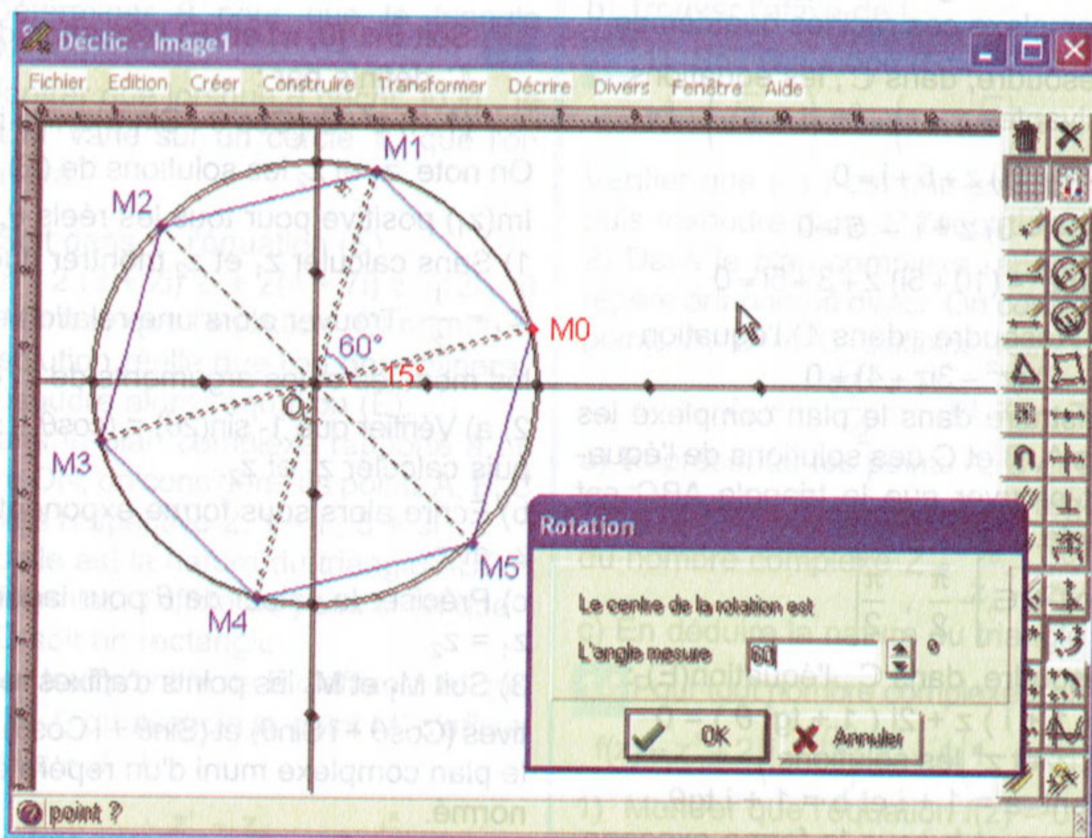
Activité

Utiliser un logiciel de géométrie pour construire un hexagone régulier de sommets les images des solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$ d'inconnue complexe z : $z^6 = 64.i$

1) Résoudre cette équation.

2) Choisir un repère orthonormé direct.

* Construire le point M_0 d'affixe $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$.
* Construire le point M_1 image du point M_0 par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
* Construire le point M_2 image du point M_1 par la rotation R.
* Achevez la construction des sommets de l'hexagone $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$.
* Construire enfin l'hexagone $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$.
* Déterminer le périmètre et l'aire de cet hexagone.
* Utiliser le logiciel pour contrôler votre réponse.



EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$3-4i$; $2i$; $-5-12i$; $\frac{2i-1}{i+2}$; $1-i\sqrt{3}$ et $1+i$.

2 Déterminer les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants : $8i$; $\sqrt{3}+i$ et $-i$

3 a) Vérifier que $2-i$ est une racine cubique de $2-11i$

b) En déduire les deux autres racines cubiques de $2-11i$.

4 a) Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $-7-24i$

b) Représenter géométriquement dans le plan complexe ces racines quatrièmes.

5 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $z^2-(3+2i)z+5+i=0$

b) $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$

c) $(4-3i)z^2-(10+5i)z+3+5i=0$

6 a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-2)(z^2-3iz+4)=0$

b) Construire dans le plan complexe les images A, B et C des solutions de l'équation et prouver que le triangle ABC est rectangle.

7 Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation(E) :
$z^2-2(1+i)z+2i(1+tg^2\theta)=0$
Soient z' et z" les solutions.

2) Soient $a=1+i$ et $b=1+i\,tg\theta$.

a) Ecrire a et b sous la forme exponentielle.

b) Exprimer z' et z" à l'aide de a et b.

c) En déduire le module et un argument de chacun des nombres complexes z' et z".

8 Soit $\theta \in]0, \pi[$ et l'équation complexe (E_θ): $z^2-e^{i\theta}(1+e^{i\theta})z+e^{i3\theta}=0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $e^{i2\theta}$.

a) Montrer que ABC est un triangle isocèle de sommet B.

b) Prouver que ABC est équilatéral si et seulement si $\left|1+e^{i\theta}\right|=1$.

3) a) Déterminer le module et un argument du complexe $1+e^{i\theta}$.

b) En déduire les valeurs de θ pour que ABC soit équilatéral.

9 Soit $\theta \in [0, \pi]$ et (E) l'équation dans $\mathbb{C}$ définie par :
$(1-i)z^2-2(\cos\theta+\sin\theta)z+1+i=0$

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $Im(z_1)$ positive pour tous les réels θ.

1) Sans calculer z_1 et z_2 montrer que $z_2=\frac{i}{z_1}$ Trouver alors une relation entre les modules et les arguments de z_1 et z_2.

2) a) Vérifier que $1-\sin(2\theta)=(\cos\theta-\sin\theta)^2$ puis calculer z_1 et z_2.

b) Ecrire alors sous forme exponentielle z_1 et z_2.

c) Préciser la valeur de θ pour laquelle $z_1=z_2$.

3) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $(\sin\theta+i\cos\theta)$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé.

Trouver l'ensemble $\mathscr{C}_1$ décrit par M_1 et l'ensemble $\mathscr{C}_2$ décrit par M_2 lorsque θ varie dans $[0, \pi]$.

10 Soient $\theta \in]0,\pi[$ et l'équation dans $\mathbb{C}$,

(E): $z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = 0$

1) a) Vérifier que :
$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$ et résoudre (E).
(On notera z' la solution de partie imaginaire positive et z'' l'autre solution)

b) Montrer que : $z' = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

et $z'' = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) Soient M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z''.

a) Calculer $\frac{z''}{z'}$ et en déduire que le triangle OM'M'' est rectangle en O.

b) Déterminer θ pour que le triangle OM'M''soit isocèle.

3) Montrer que lorsque θ décrit $]0,\pi[$, le point M' varie sur un cercle $\mathbb{C}$ que l'on précisera.

11 Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :
$$z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i = 0$$
1) a)Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
b) Résoudre alors l'équation (E).
2) Dans le plan complexe rapporté à un repère ON, on considère les points A, B, C d'affixes respective 2, 1 + i , 3 + 3i.
a) Quelle est la nature du triangle ABC ?
b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un rectangle.
3) Pour tout point M de P d'affixe z tel que $z \neq (1+i)$ on associe le point M' d'affixe $z' = 2iz + 3 - i$.

a) Montrer que $\frac{z' - z_B}{z - z_B} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) En déduire la nature du triangle BMM'.

12 Ou considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :
$$z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i) = 0.$$
1) a) Vérifier que $z_0 = 3i$ est une solution de L'équation (E).
b) Montre que (E) est équivalente à l'équation $(z-3i)[(z-3)^2 - 6i] = 0$.
2) a) Résoudre dans C l'équation
$U^2 = 6i$ d'inconnue U.
b) Déduire les antres solutions z_1 et z_2 de l'équation (E).
3) Soit dans le plan complexe P les points M_0,M_1 et M_2 images respectives de 3i, $3+\sqrt{3}(1+i)$ et $3-\sqrt{3}(1+i)$
Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle $M_0M_1M_2$ et I son centre.
a) Montrer que $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral.
b) Trouver l'affixe de I.

13 1) Soit l'équation (E) :
$$z^3 + (\sqrt{3} + i)z^2 + (1 + i\sqrt{3})z + i = 0$$
Vérifier que (- i) est une solution de (E) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonomé direct. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -i$, $z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$ et $z_C = \overline{z_B}$
a) Représenter les points A, B et C.
b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$
c) En déduire la nature du triangle ABC

14 Pour tout nombre complexe z on pose :
$$f(z) = z^3 + 2(i - \sqrt{3})z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$$
1) Montrer que l'équation f(z) = 0 possède une racine imaginaire pure z_0. En déduire les autres racines z_1 et z_2. (On notera z_1 la racine dont la partie imaginaire est négative).

2) On pose $w = \frac{z_1}{z_0}$.

a) Donner la forme exponentielle de w.

b) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct. A tout nombre complexe z on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives z, wz et w^2z. Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

15 Soit θ un réel appartenant à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On considère l'équation d'inconnue z, (E) : $(1+iz)^3(1-i\,tg\,\theta)=(1-iz)^3(1+i\,tg\,\theta)$

1) Soit z une solution de (E).

a) Montrer que $|1+iz|=|1-iz|$.

b) En déduire que z est réel.

2) a) Ecrire $\frac{1+i\,tg\,\theta}{1-i\,tg\,\theta}$ sous forme trigonométrique.

b) Soit z un nombre réel, on pose z = tg α avec $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ecrire l'équation portant sur α traduisant (E) et la résoudre. Déterminer alors les solutions de (E).

16 1) Déterminer les racines cubiques de $u = 4\sqrt{2}\,(-1+i)$

2) Soit $\theta \in]0, \pi[$. Ecrire $\frac{1}{1-e^{i\theta}}$ sous la forme cartésienne.

3) Résoudre, dans C, l'équation (E) : $(2z-1)^3 = 4\sqrt{2}\,(-1+i)\,z^3$

17 1) a) Déterminer la forme trigonométrique de $\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3})$

b- En déduire $\cos(7\pi/12)$ et $\sin(7\pi/12)$

2) Déterminer les racines cubiques de chacun des complexes a = 2 + 2 i et $b=\overline{a}$ puis placer les images des complexes trouvés dans un repère ON (unité : 2 cm).

3) Soit $P(z) = z^6 - 4z^3 + 8$ et l'équation (E) : P(z) = 0.

a) Montrer que si z_0 est une solution de (E) alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.

b) Résoudre dans C l'équation (E).

4) En déduire une factorisation de P(z) en produit de polynômes du second degré à coefficients réels.

18 Soit $\theta \in [-\pi, \pi[$ et l'équation dans $\mathbb{C}$ définie par (E) :

$i z^2 + (2\sin\theta)\,z - 2i\,(1+\cos\theta)=0$

1) a) Vérifier que :

$\sin^2\theta - 2(1+\cos\theta) = -(1+\cos\theta)^2$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation(E).

2) Soit dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct. Les points M' et M" d'affixes respectives

$z' = 1+\cos\theta + i\sin\theta$ et

$z'' = -1-\cos\theta + i\sin\theta$.

a) Montrer que $z'' = -\overline{z'}$. En déduire que les points M' et M" sont symétriques par rapport à une droite que l'on déterminera.

b) Ecrire z' sous forme exponentielle, en déduire que $\frac{z''}{z'} = e^{i(\pi-\theta)}$

c) En déduire que le triangle OM'M" est isocèle et déterminer les valeurs de θ pour les quelles le triangle OM'M" est équilatéral.

19 Soit $\theta \in]0, \pi[$ et l'équation dans $\mathbb{C}$

(E) : $z^3 + 4z^2 + (5 - e^{2i\theta})\,z - 4i\sin\theta\, e^{i\theta} = 0$

1) a) Prouver que $e^{i\theta}$ est une racine carrée de $1 + 2i\sin\theta\, e^{i\theta}$.

b) Montrer que $z_0 = -2$ est une solution de (E) puis la résoudre.

2) On donne les points A(-2), $M_1(z_1 = -1 + e^{i\theta})$ et $M_2(z_2 = -1 - e^{i\theta})$

a) Mettre sous forme exponentielle z_1 et $\frac{z_1}{z_2}$

b) Montrer que les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe I.

c) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M_1 quand θ varie puis déduire Γ_2 l'ensemble des points M_2 et les construire.

d) Montrer que OM_1AM_2 est un rectangle puis déterminer la valeur de θ pour laquelle on obtient un carré.

20 θ étant un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :
$z_1 = 1 - e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{3i\theta}$.

b) En déduire le module et un argument du nombre complexe : $z_3 = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$
(On rappelle que
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$).

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$(E_\theta) : z^2 - (2 + e^{2i\theta}) z + 1 - e^{3i\theta} = 0$.
On donnera les solutions sous forme exponentielle.

21 α étant un réel de $]0, \pi[$ et z un nombre complexe. On pose
$P(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha) z^2 + (1 - 2\sin\alpha) z - 1$

1) a) Calculer P(1).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ et écrire les solutions sous forme exponentielle.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$U^3 = e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

3) Vérifier que pour tout réel θ, on a :

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

4) Résoudre dans C l'équation :

$$(z - 1)^6 + 2\sin\alpha\,(z - 1)^3 + 1 = 0$$

22 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :
$z^2 - (1+i) z + i = 0$

2) θ étant un réel de l'intervalle, $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on considère l'équation dans $\mathbb{C}$,
$E_\theta : z^2 - 2e^{i\theta}\cos\theta\, z + e^{2i\theta} = 0$.

a- Vérifier que 1 est une solution de E_θ.

b- En déduire l'autre solution de E_θ.

3) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B les points d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$.

a- Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b- Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un losange.

b- Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire du losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$.

(D'après Bac Tunisien 2000).

23 1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :
$z^2 - 2i z - 2 = 0$.

b- Mettre les solutions sous forme trigonométrique.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$, on considère l'équation d'inconnue z complexe : (E) : $z^2 - 2e^{i\theta} . z + e^{2i\theta} - 1 = 0$.
Résoudre l'équation (E).

3) Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_1 = 2e^{i\theta}$; $z_2 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_3 = -1 + e^{i\theta}$.

a- Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

b- Montrer que OBAC est un rectangle.

c- Déterminer le réel θ de $]0, \pi[$ tel que OBAC soit un carré.

(D'après Bac Tunisien 1999).

Exercice n° 1

- $a = 3 - 4i$, posons $b = x + iy$

$b^2 = a$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = Re(a) = 3 \\ x^2 + y^2 = |a| = 5 \\ x.y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ x.y < 0 \end{cases}$

Donc $x = \pm 2$ et $y = \mp 1$

D'où les racines carrées de $3 - 4i$ sont :

$b_0 = 2 - i$ et $b_1 = -2 + i$

- $a = 2i$

On a : $(1 + i)^2 = 2i$ par suite les racines carrées de 2i sont : $b_0 = 1 + i$ et $b_1 = -1 - i$

- $a = -5 - 12i$, posons $b = x + iy$

$b^2 = a$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ x.y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ x.y < 0 \end{cases}$

Donc $x = \pm 2$ et $y = \pm 3$

D'où les racines carrées de $(-5 - 12i)$ sont :

$b_0 = 2 - 3i$ et $b_1 = -2 + 3i$

- $a = \dfrac{2i - 1}{i + 2}$

Déterminons l'écriture algébrique de a :

$$a = \frac{2i - 1}{i + 2} = \frac{(2i - 1).(-i + 2)}{5} = \frac{2 + 4i + i - 2}{5} = i$$

Or on a : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ d'où les racines carrées de a sont

$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

- $a = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

D'où les racines carrées de a sont : $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

- $a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où les racines carrées de a sont :

$\sqrt{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{9\pi}{8}}$

Exercice n° 2

- $a = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\, e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 8$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 8$ Signifie $r = 2$

Donc on aura :

<u>k = 0</u> : $Z_0 = 2\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$

<u>k = 1</u> : $Z_1 = 2\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$

<u>k = 2</u> : $Z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$

- $a = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\, e^{i(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 2$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 2$ Signifie $r = \sqrt[3]{2}$ (voir analyse)

Donc on aura :

<u>k = 0</u> : $Z_0 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{18}}$

<u>k = 1</u> : $Z_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{13\pi}{18}}$

<u>k = 2</u> : $Z_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{25\pi}{18}} = \sqrt[3]{2}\, e^{-i\frac{11\pi}{18}}$

- $a = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\, e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 1$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 1$ Signifie $r = 1$

Donc on aura :

<u>k = 0</u> : $Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

<u>k = 1</u> : $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

<u>k = 2</u> : $Z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Exercice n° 3

a) On a : $(2 - i)^3 = 2^3 - 3x\, 2^2 x\, i + 3x2x\, i^2 - i^3$
$= 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

$\boxed{(2 - i)^3 = 2 - 11i}$

Donc 2-i est une racine cubique de 2-11i

b) soit z tel que : $z^3 = 2 - 11i$

Or $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ d'où $\dfrac{z^3}{(2 - i)^3} = 1$ (E)

On posons $Z = \dfrac{z}{2 - i}$ l'équation (E)

Devienne $Z^3 = 1$ (E')

Z_0, Z_1 et Z_2 les solutions de l'équation (E') sont les racines cubiques de l'unité soit donc :

$Z_0 = 1$, $Z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Il en résulte que z_0, z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) vérifient :

* $\frac{z_0}{2-i} = Z_0 = 1 \Rightarrow \boxed{z_0 = 2-i}$

* $\frac{z_1}{2-i} = Z_1 \Rightarrow z_1 = (2-i)\,Z_1 = (2-i).\,(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow z_1 = -1 + i\sqrt{3} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\boxed{z_1 = (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) + i\,(\frac{1}{2} + \sqrt{3})}$

* $\frac{z_2}{2-i} = Z_1 \Rightarrow z_2 = (2-i)\,Z_2 = (2-i).\,(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow z_2 = -1 - i\sqrt{3} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\boxed{z_2 = (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + i\,(\frac{1}{2} - \sqrt{3})}$

Exercice n° 4

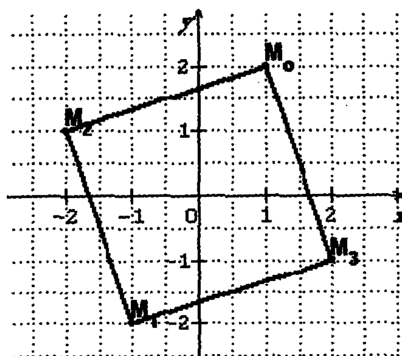
a) Un travail analogue à celui fait à l'ex 1 donne : les racines carrées de $-7-24i$ sont : $3-4i$ et $-3+4i$

les racines carrées de $3-4i$ sont : $2-i$ et $-2+i$

les racines carrées de $-3+4i$ sont : $1+2i$ et $-1-2i$

Donc **Les racines quatrièmes de $-7-24i$ sont : $1+2i$; $-1-2i$; $-2+i$ et $2-i$**

b) Soient M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3 les points d'affixes respectivement z_0, z_1, z_2 et z_3



$M_0M_2M_1M_3$ carré

Exercice n° 5

a) $z^2 - (3+2i)\,z + 5 + i = 0$

$\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+i) = 9 + 12i - 4 - 20 - 4i = -15 + 8i$

Soit $\delta = x+iy$ une racine carrée de Δ

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -15 & (1) \\ x^2 + y^2 = 17 & (2) \\ 2xy = 8 & (3) \end{cases}$$

(1)+(2) $\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Pour $x=1$ l'éq (3) donne $y=4$

Donc $\delta = 1+4i$ une racine carrée de Δ

Par suite les solutions de l'équation sont :

$$Z' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{3+2i+1+4i}{2} = 2+3i$$

$$Z'' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{3+2i-1-4i}{2} = 1-i$$

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{2+3i, 1-i\}$

b) $i\,z^2 - (4i-3)\,z + i - 5 = 0$

$\Delta = (4i-3)^2 - 4i\,(i-5) = -3-4i$

Soit $\delta = x+iy$ une racine carrée de Δ

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \\ 2xy = -4 & (3) \end{cases}$$

(1)+(2) $\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Pour $x=1$ l'éq (3) donne $y=-2$

Donc $\delta = 1-2i$

Par suite les solutions de l'équation sont :

$$Z' = \frac{-4i+3-1+2i}{2i} = \frac{-2i+2}{2i} = -1-i$$

$$Z'' = \frac{-4i+3+1-2i}{2i} = \frac{-6i+4}{2i} = -3-2i$$

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{-3-2i, -1-i\}$

c) $(4-3i)z^2 - (10+5i)\,z + 3 + 5i = 0$

$\Delta = (10+5i)^2 - 4\,(4-3i).\,(3+5i)$
$= 100 + 100i - 25 - 4\,(27+11i) = -33 + 56i$

soit $\delta = x+iy$ une racine carrée de Δ

On a $|\Delta| = \sqrt{(-33)^2 + 56^2} = \sqrt{4225} = 65$

On aura don le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -33 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 65 \quad (2) \\ 2x.y = 56 \quad (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

Pour $x = 4$ l'éq (3) donne $y = 7$

D'où : $\delta = 4 + 7i$

Par suite les solutions de l'équation sont :

$$Z' = \frac{10+5i+4+7i}{2(4-3i)} = \frac{7+6i}{4-3i} = \frac{(7+6i).(4+3i)}{4^2+3^2}$$

$$= \frac{28+21i+24i-18}{25} = \frac{2}{5} + \frac{9}{5}i$$

$$Z'' = \frac{10+5i-4-7i}{2(4-3i)} = \frac{3-i}{4-3i} = \frac{(3-i).(4+3i)}{4^2+3^2}$$

$$= \frac{12+9i-4i+3}{25} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

D'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{2}{5} + \frac{9}{5}i ; \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i \right\}$

Exercice n° 6

a) $(z-2).(z^2 - 3iz + 4) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2 = 0$ ou $z^2 - 3iz + 4 = 0$

$\Leftrightarrow z_0 = 2$ ou $z^2 - 3iz + 4 = 0$

- $z^2 - 3iz + 4 = 0$:

On a $\Delta = (-3i)^2 - 4 \times 4 = -9 - 16 = -25 = (5i)^2$

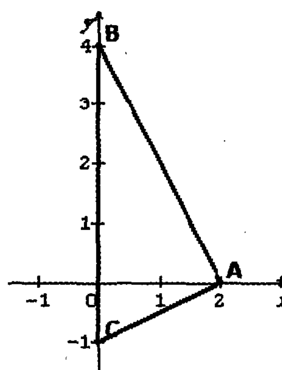
Donc 5i est une racine carrée de Δ d'où les solutions

de l'équation $z^2 - 3iz + 4 = 0$ sont :

$z' = \frac{3i+5i}{2} = 4i$ et $z'' = \frac{3i-5i}{2} = -i$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{2, 4i, -i\}$

b) $z_A = 2$, $z_B = 4i$ et $z_C = -i$



On a : $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = 4i - 2$

$\text{aff}(\overrightarrow{AC}) = z_c - z_A = -i - 2$

$\frac{\text{aff}(\overrightarrow{AB})}{\text{aff}(\overrightarrow{AC})} = \frac{4i-2}{-i-2} = \frac{(4i-2)(i-2)}{5} = -2i$ imaginaire pure

Par suite (AB) et (AC) sont perpendiculaires d'où le triangle ABC est rectangle en A

Exercice n° 7 $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

● a) $\Delta' = (1+i)^2 - .2i.\ (1 + tg^2\,\theta)$

$= 2i - 2i - 2i\,tg^2\,\theta = -2i\,tg^2\,\theta = [(1-i)tg\,\theta]^2$

Donc $\delta = (1-i)tg\,\theta$

D'où :

$Z' = 1 + i + (1-i)\,tg\,\theta$

$Z'' = 1 + i - (1-i)\,tg\,\theta$

$S_{\mathbb{C}} = \{(1+i) + (1-i)tg\theta ; (1+i) - (1-i)tg\theta\}$

● a) $a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$b = 1 + i\,tg\,\theta = \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$

Donc $b = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$ (car $\cos\theta > 0$)

b) * $Z' = (1+i)\left[1 + \frac{1-i}{1+i}tg\theta\right]$,

or $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$. Par suite on aura :

$z' = (1+i)(1 - i\,tg\,\theta) \Longrightarrow Z' = a\bar{b}$

* $Z'' = (1+i)\left[1 - \frac{1-i}{1+i}tg\theta\right] = (1+i)(1 + i\,tg\,\theta)$

$\Longrightarrow Z'' = ab$

c) $Z' = a\bar{b} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} . \frac{1}{\cos\theta}e^{-i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}e^{i(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

$Z'' = ab = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} . \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}e^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)}$

Exercice n° 8 $\theta \in]0,\pi[$

$(E_\theta): z^2 - e^{i\theta}(1+e^{i\theta})z + e^{i3\theta} = 0$

● $\Delta = [e^{i\theta}(1+e^{i\theta})]^2 - 4e^{3i\theta}$

$= [e^{2i\theta}(1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta})] - 4e^{3i\theta}$

$= e^{2i\theta}(1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta}-4e^{i\theta})$

$= e^{2i\theta}(1+e^{2i\theta}-2e^{i\theta})$

$\Delta = (e^{i\theta})^2(1-e^{i\theta})^2 = [e^{i\theta}(1-e^{i\theta})]^2$

$\Longrightarrow \delta = e^{i\theta}(1-e^{i\theta})$ D'où :

$Z' = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})+e^{i\theta}(1-e^{i\theta})}{2} = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta}+1-e^{i\theta})}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{Z' = e^{i\theta}}$

$Z'' = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})-e^{i\theta}(1-e^{i\theta})}{2} = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta}-1+e^{i\theta})}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{Z'' = e^{2i\theta}}$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{e^{i\theta}, e^{2i\theta}\}$

● a) $AB = |z_B - z_A| = |e^{i\theta} - 1|$

$BC = |z_C - z_B| = |e^{2i\theta} - e^{i\theta}|$

$BC = |e^{i\theta}(e^{i\theta}-1)| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{1}.|e^{i\theta}-1|$

$= |e^{i\theta}-1| = AB$

Donc le triangle ABC est isocèle de sommet B

b) Calculons la distance AC :

$AC = |z_C - z_A| = |e^{2i\theta} - 1| = |(e^{i\theta}+1).(e^{i\theta}-1)|$

$= |e^{i\theta}+1|.|e^{i\theta}-1|$

On sait que ABC est isocèle de sommet B d'où pour que ce triangle soit équilatérale il faut que : AB = AC

Donc ABC est équilatéral si et seulement si :

$|e^{i\theta}-1| = |e^{i\theta}+1|.|e^{i\theta}-1|$

Puisque $\theta \neq 0$ alors $e^{i\theta} \neq 1$

Finalement ABC est équilatéral si et seulement si :

$|e^{i\theta}+1| = 1$

● a) $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ par suite

Le module de $(1 + e^{i\theta})$ est $2\cos\frac{\theta}{2}$ et un argument de $(1 + e^{i\theta})$ est $\frac{\theta}{2}$

b) ABC est équilatéral si et seulement si $2\cos\frac{\theta}{2} = 1$

Donc $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

On aura alors :

$\begin{cases} \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \theta = -\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Or $\theta \in]0,\pi[$ Donc :

pour que ABC soit équilatéral il faut que θ soit $\frac{2\pi}{3}$

Exercice n° 9

$(E): (1-i)z^2 - 2(\cos\theta + \sin\theta)z + 1 - i = 0$

1) On sait que dans l'équation : $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{C}^*$ $b \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ les solutions z_1 et z_2 vérifient $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

D'où on aura : $z_1 z_2 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i).(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{2i}{2} = i$

$\Rightarrow z_2 = \frac{i}{z_1} \Rightarrow |z_2| = \left|\frac{i}{z_1}\right| = \frac{|i|}{|z_1|} = \frac{1}{|z_1|}$

Et $\text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(i) - \text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arg}(z_1)$

2) a)

- $1 - \sin 2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta.\cos\theta$

$= (\cos\theta - \sin\theta)^2$

- Résolution de l'équation (E) :

$\Delta' = (\cos\theta + \sin\theta)^2 - (1+i).(1-i)$

$= \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} + 2\sin\theta.\cos\theta - 2$

$= \sin 2\theta - 1 = -(1 - \sin 2\theta)$

$= [i(\cos\theta - \sin\theta)]^2$

Donc une racine carre de Δ' (discriminant réduit) est $\delta' = i(\cos\theta - \sin\theta)$ d'où on aura :

$$z_2 = \frac{\cos\theta + \sin\theta + i\cos\theta - i\sin\theta}{1-i}$$

$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta + i\cos\theta - i\sin\theta)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2\sin\theta + 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta + i\cos\theta$$

$$z_1 = \frac{\cos\theta + \sin\theta - i\cos\theta + i\sin\theta}{1-i}$$

$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta - i\cos\theta + i\sin\theta)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$$

On a $\theta \in]0, \pi[$ donc $\text{Im } z_1 > 0$

Donc $\boxed{z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \text{ et } z_2 = \sin\theta + i\cos\theta}$

b) $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \implies z_1 = e^{i\theta}$

$z_2 = \sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta - i\sin\theta) = ie^{-i\theta}$

$= e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{-i\theta} \implies z_2 = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

c) $z_1 = z_2 \iff \sin\theta = \cos\theta \iff \theta = \frac{\pi}{4}$

car $\theta \in]0, \pi[$

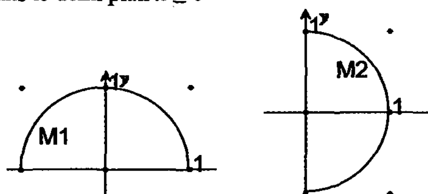
3) $\theta \in [0, \pi]$: et $\text{aff}(M_1) = e^{i\theta}$

Donc M_1 décrit le demi – cercle trigonométrique situé dans le demi plan $y \geq 0$

$\text{aff}(M_2) = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

$\theta \in [0, \pi] \iff -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Donc M_2 décrit le demi – cercle trigonométrique situé dans le demi plan $x \geq 0$



Exercice n° 10 $\theta \in]0, \pi[$

1) a) $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \underset{f.Moivre}{=} \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

- Résolution de l'équation

(E) : $z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta.\cos\theta = 0$

$\Delta' = 1 - (2\sin^2\theta - 2i\sin\theta.\cos\theta)$

$= 1 - 2\sin^2\theta + 2i\sin\theta.\cos\theta$

$= \underbrace{\cos 2\theta}_{\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a} + \overbrace{i\sin 2\theta}^{\sin 2a = 2\sin a\cos a}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

Donc une racine carre de Δ' (discriminant réduit) est $\delta' = \cos\theta + i\sin\theta$ d'où on aura :

$z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$, $\text{Im } z' = \sin\theta \geq 0$
$z'' = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$

b) $z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta}$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

$z'' = 1 - \cos\theta - i\sin\theta = 1 - e^{i\theta}$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) a) $\frac{z''}{z'} = \frac{-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}$, $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$= -i\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = -itg\frac{\theta}{2}$

Donc $\frac{aff(\overrightarrow{OM''})}{aff(\overrightarrow{OM'})}$ imaginaire pur ce qui prouve que le triangle OM'M" est rectangle en O

b) OM'M" est isocèle si et seulement si : OM' = OM"

$\iff |z'| = |z''| \iff \left|\frac{z''}{z'}\right| = \left|-itg\frac{\theta}{2}\right| = 1$

$\iff \left|tg\frac{\theta}{2}\right| = 1$ et $tg\frac{\theta}{2} > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

D'où $tg\frac{\theta}{2} = 1$ ce qui donne $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

Conclusion : OM'M" est isocèle si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$

3) $z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta} \iff z' - 1 = e^{i\theta}$

$\iff |z' - 1| = |e^{i\theta}| = 1$ donc IM' = 1 où I est le point d'affixe 1 ce qui prouve que le point M' vari sur le cercle C de centre I et de rayon 1

Exercice n° 11

$(E) : z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i = 0$

1) a) Soit x un réel ,
x solution de (E) signifie

$x^3 - (6x^2 + 4ix^2) + (8 + 14i)x - 12i = 0 \iff$

$x^3 - 6x^2 + 8x + i(-4x^2 + 14x - 12) = 0 \iff$

$\iff \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x = 0 (1) \\ -4x^2 + 14x - 12 = 0 (2) \end{cases}$

On a va résoudre dans IR l'équation (2)

$-4x^2 + 14x - 12 = 0$

$\Delta = 14^2 - 4 \times (-4) \times (-12) = 196 - 192 = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$

Donc $x' = \frac{-14+2}{-8} = \frac{3}{2}$ et $x'' = \frac{-14-2}{-8} = 2$

Or 2 est solution de l'équation (1) et $\frac{3}{2}$ n'est pas une solution de l'équation (1)

Conclusion : **$z_0 = 2$ est une solution réelle de (E)**

b) 2 est une solution de (E) $\Rightarrow$

$z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i = (z-2)(a.z^2 + b.z + c)$

$\Leftrightarrow$

$z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -6-4i \\ c - 2b = 8+14i \\ -2c = -12i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4-4i \\ c = 6i \end{cases}$$

Donc (E) est équivalente à l'équation :

$(z-2)(z^2 - (4+4i)z + +6i) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z - 2 = 0$ ou $z^2 - (4+4i)z + +6i = 0$

On va résoudre $z^2 - (4+4i)z + +6i = 0$ en effet :

$\Delta' = (2+2i)^2 - 6i = 4(1+i)^2 - 6i = 8i - 6i = 2i = (1+i)^2$

Donc $\delta = (1+i)$

Par suite $z' = 2+2i+1+i = 3+3i$
$z'' = 2+2i-1-i = 1+i$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{2, 3+3i, 1+i\}$

● $z_A = 2$, $z_B = 1+i$ et $z_C = 3+3i$

a) Calculons les distances AB , AC et BC :

$AB = |z_B - z_A| = |1+i-2| = |-1+i| = \sqrt{2}$

$AC = |z_C - z_A| = |3+3i-2| = |1+3i| = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$

$BC = |z_C - z_B| = |3+3i-1-i| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$

On remarque que :

$2 + 8 = AB^2 + BC^2 = AC^2 = 10$

D'après la réciproque de théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B

b) Pour que ABCD soit un rectangle il suffit qu'il soit un parallélogramme car ABC est rectangle en B, on aura donc :

$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(\overrightarrow{DC}) \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

$\Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A = 3+3i - 1 - i - 2 = 2i$

Donc $z_D = 2i$

● a) On a : $\frac{z' - z_B}{z - z_B} = \frac{2iz + 3 - i - 1 - i}{z - 1 - i}$

$= \frac{2iz + 2 - 2i}{z - 1 - i}$

$= \frac{2i(z - 1 - i)}{z - 1 - i} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) On a : $\text{Arg}\left(\frac{z' - z_B}{z - z_B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{MB}\right)$

$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

d'où (BM') $\perp$ (BM) ce qui prouve que le triangle BMM' rectangle en B

Exercice n° 12

(E): $z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i) = 0$

● a) remplaçant dans l'équation (E) z par 3i on aura :

$(3i)^3 - (6+3i)(3i)^2 + (9+12i)(3i) - 9(2+3i)$
$= -27i + 54 + 27i + 27i - 36 - 18 - 27i$
$= 54i - 54i + 54 - 54 = 0$

d'où 3i est une solution de (E)

b) On a :

$(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = (z-3i)(z^2 - 6z + 9 - 6i)$
$= z^3 - 6z^2 + 9z - 6iz - 3iz^2 + 18iz - 27i - 18$
$= z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i)$ donc

(E) est équivalente à l'équation $(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = 0$

● a) $u^2 = 6i = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $u = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $u = -\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Or $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Et $\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt{3} + i\sqrt{3}, -\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right\}$

b) On a :

$(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = 0 \Leftrightarrow$

$(z-3i) = 0$ Ou $(z-3)^2 - 6i = 0 \Leftrightarrow$

$z = 3i$ ou $z - 3 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ *ou* $z - 3 = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Par suite les solutions sont : $z_0 = 3i$, $z_1 = 3 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 3 - \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

● a) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |-\sqrt{3}(2+2i)| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$$M_0M_1 = |z_1 - z_0| = |\sqrt{3}+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-\sqrt{3})|$$
$$= \sqrt{(3+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-3)^2}$$
$$= \sqrt{9+6\sqrt{3}+3+3-6\sqrt{3}+9} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$M_0M_2 = |z_2 - z_0| = |3-\sqrt{3}-i(\sqrt{3}+3)|$$
$$= \sqrt{(3-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}+3)^2}$$
$$= \sqrt{9-6\sqrt{3}+3+9+6\sqrt{3}+3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

D'où $M_1M_2 = M_0M_2 = M_0M_1$ et par suite le triangle $M_0 M_1M_2$ est un triangle équilatéral

b) puisque le triangle $M_0 M_1M_2$ est un triangle équilatéral alors le centre de centre de son cercle circonscrit est son centre de gravité et par suite :

$$z_I = \frac{z_0+z_1+z_2}{3} = \frac{3i+3+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3}$$

Donc $\boxed{z_I = 2+i}$

Exercice n° 13

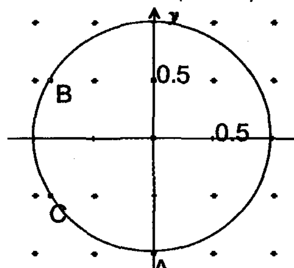
: $z^3 + (\sqrt{3}+i)z^2 + (1+i\sqrt{3})z + i = 0$

● $(-i)^3 + (\sqrt{3}+i)(-i)^2 + (1+i\sqrt{3})(-i) + i$
$= i - \sqrt{3} - i - i + \sqrt{3} + i = 0$
D'où $(-i)$ est une solution de (E)

(E) est équivalente à l'équation $(z+i)[z^2+az+b]=0$
En développent et par identification on trouve
$a = \sqrt{3}$ et $b = 1$
donc les solutions de (E) sont les solutions de l'équation
$(z+i)(z^2+\sqrt{3}z+1) = 0 \Leftrightarrow$
$(z+i) = 0$ Où $(z^2+\sqrt{3}z+1) = 0$
On va résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2+\sqrt{3}z+1 = 0$
$\Delta = \sqrt{3}^2 - 4 = -1 = i^2 \Longrightarrow \delta = i$ d'ou $z' = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$
et $z'' = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \Longrightarrow S_{\mathbb{C}} = \{-i, z', z''\}$

● a) $z_A = -i$, $z_B = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

Donc : $OB = 1$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et $C = S_{(O,\vec{i})}(B)$



b) $Z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{z_B - \overline{z_B}}{-i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{2i \operatorname{Im} z_B}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$

$$Z = \frac{2i.\frac{1}{2}}{(\sqrt{3}-i).\frac{1}{2}} = \frac{2i}{\sqrt{3}-i}$$

Donc $|Z| = \left|\frac{2i}{\sqrt{3}-i}\right| = \frac{|2i|}{|\sqrt{3}-i|} = \frac{2}{2} = 1$

$$\operatorname{Arg}Z \equiv Arg\left(\frac{2i}{\sqrt{3}-i}\right)[2\pi]$$
$$\equiv Arg(2i) - Arg(\sqrt{3}-i)[2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

Conclusion : $\boxed{Z = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]}$

c) $|Z| = \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = \frac{CB}{CA} = 1$

D'où le triangle ABC est isocèle de sommet principal C

Exercice n° 14

$f(x) = (x)^3 + 2(i-\sqrt{3})(x)^2 + 4(1-i\sqrt{3})(x) + 8i$

1) Cherchons $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(ix) = 0$, en effet :

$f(ix) = 0 \Leftrightarrow$
$(ix)^3 + 2(i-\sqrt{3})(ix)^2 + 4(1-i\sqrt{3})(ix) + 8i = 0 \Leftrightarrow$
$-ix^3 - 2ix^2 + 2\sqrt{3}x^2 + 4ix + 4\sqrt{3}x + 8i = 0 \Leftrightarrow$
$2\sqrt{3}x(x+2) + i(-x^3 - 2x^2 + 4x + 8) = 0$

$$f(ix) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}(x+2) = 0 \\ -x^3 - 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Donc :
$z_0 = -2i$ est une racine imaginaire pure de $f(z) = 0$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2+az+b) = 0$
$\Leftrightarrow z^3 + (a+2i)z^2 + (b+2ia)z + 2ib = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2i = 2i - 2\sqrt{3} \\ b+2ia = 4-4i\sqrt{3} \\ 2ib = 8i \end{cases} \Leftrightarrow a = -2\sqrt{3} \text{ et } b = 4$$

D'où $f(z)=0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

$\Leftrightarrow z+2i=0$ Ou $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

*Résolution de l'équation $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta' = \sqrt{3}^2-4=-1=i^2$ Donc $\delta=i$

Par suite : $z_1=\sqrt{3}-i$ et $z_2=\sqrt{3}+i$

$S_{\mathbb{C}}=\{-2i,\sqrt{3}+i,\sqrt{3}-i\}$

● a) $w=\dfrac{z_1}{z_0}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{-2i}=\dfrac{(\sqrt{3}-i).i}{(-2i).i}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) aff($\overrightarrow{OM}$) = z

aff($\overrightarrow{M_2M_1}$) $= wz-w^2z=z.(w-w^2)=z(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{2\pi}{3}})$

$=z.(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=z$

$\Longrightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_2M_1} \Longrightarrow$ OMM_1M_2 est un parallélogramme (1)

Aussi on a : $OM=|z|$

$OM_2=|wz|=|z|\,|w|=|z|$

D'où $OM=OM_2$ (2)

(1) + (2) donne : OMM_1M_2 est un losange

Exercice n° 15 $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$(E):(1+iz)^3(1-itg\theta)=(1-iz)^3(1+itg\theta)$

● a) z solution de (E) $\Leftrightarrow$

$(1+iz)^3.(1-itg\,\theta)=(1-iz)^3.(1+itg\,\theta)$

$\Leftrightarrow |(1+iz)^3|\,|1-itg\,\theta|=|(1-iz)^3|\,|1+itg\,\theta|$

$\Leftrightarrow |1+iz|^3.\sqrt{1+tg^2\theta}=|1-iz|^3.\sqrt{1+tg^2\theta}$

$\Leftrightarrow |1+iz|^3=|1-iz|^3 \Leftrightarrow \boxed{|1+iz|=|1-iz|}$

b) posons $z=x+iy$; $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$|1+iz|=|1-iz| \Leftrightarrow |1+i(x+iy)|=|1-i(x+iy)|$

$\Leftrightarrow |1-y+ix|=|1+y-ix|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2}=\sqrt{(1+y)^2+x^2}$

$\Leftrightarrow (1-y)^2+x^2=(1+y)^2+x^2$

$\Leftrightarrow (1-y)^2=(1+y)^2$

$\Leftrightarrow -2y=2y \Leftrightarrow y=0$

Donc $|1+iz|=|1-iz| \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow$ z est réel

● a) $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$\frac{1+itg\theta}{1-itg\theta}=\frac{\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$$

Donc $\boxed{\dfrac{1+itg\theta}{1-itg\theta}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta}$

b) $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ posons $z=tg\,\alpha$ et remplaçant z dans l'équation (E) on aura pour $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

$(1+i\,tg\,\alpha)^3.(1-itg\,\theta)=(1-i\,tg\,\alpha)^3.(1+itg\,\theta)$

$\Leftrightarrow$

$(\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha})^3=\dfrac{1+itg\theta}{1-itg\theta} \Leftrightarrow (e^{2i\alpha})^3=e^{2i\theta}$

$\Leftrightarrow e^{6i\alpha}=e^{2i\theta} \Leftrightarrow 6\alpha=2\theta+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

On sait que $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

donc :

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{6}\prec-\dfrac{\theta}{3}\prec\dfrac{\pi}{6}\ (1)\\ -\dfrac{\pi}{2}\prec\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{k\pi}{3}\prec\dfrac{\pi}{2}\ (2)\end{cases}$$

(1) + (2) $\Longrightarrow -\dfrac{2\pi}{3}\prec\dfrac{k\pi}{3}\prec\dfrac{2\pi}{3} \Longrightarrow -2<k<2$

D'où $k\in\{-1,0,1\}$ on a alors pour :

- $k=0 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}$
- $k=1 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{3}$
- $k=-1 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}-\dfrac{\pi}{3}$

Finalement : $S_{\mathbb{C}}=\left\{tg\dfrac{\theta}{3};tg(\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{3});tg(\dfrac{\theta}{3}-\dfrac{\pi}{3})\right\}$

Exercice n° 16

● les racines cubiques de u sont les solutions de :

$z^3=u$ Or $u=4\sqrt{2}(-1+i)=8e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z^3=8e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow z_k=2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $k\in\{0,1,2\}$

Donc les racines cubiques de $4\sqrt{2}(-1+i)$ sont :

$z_0 = 2\,e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = 2\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $z_1 = 2\,e^{i\frac{19\pi}{12}}$

● $\theta \in]0,\pi[$

$$\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}$$
$$= \frac{(1-\cos\theta)+i\sin\theta}{[(1-\cos\theta)-i\sin\theta].[(1-\cos\theta)+i\sin\theta]}$$
$$= \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{[1-\cos\theta]^2+[\sin\theta]^2} = \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{2-2\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{2(1-\cos\theta)}+i\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$
$$= \frac{1}{2}+i\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\left[1-(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})\right]} = \frac{1}{2}+i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{2}(1+i\cot g\frac{\theta}{2}) \text{ ,}\theta \in]0,\pi[} \;(**)$$

● $(2z-1)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i).z^3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2z-1}{z}\right)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i) = u$$

d'après la question 1) on aura :

$\frac{2z-1}{z} = z_k \Leftrightarrow z = \frac{1}{2-z_k}$

D'où les solutions de l'équation (E) sont

- $z_0' = \frac{1}{2-z_0} = \frac{1}{2-2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}}$

Remplacer θ par $\frac{\pi}{4}$ dans (**)

$$\Longrightarrow \boxed{z_0' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{\pi}{8})}$$

- $z_1' = \frac{1}{2-z_1} = \frac{1}{2-2e^{i\frac{11\pi}{12}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{i\frac{11\pi}{12}}}$

Remplacer θ par $\frac{11\pi}{12}$ dans (**)

$$\Longrightarrow \boxed{z_1' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{11\pi}{24})}$$

- $z_2' = \frac{1}{2-z_2} = \frac{1}{2-2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{i\frac{19\pi}{12}}}$

Remplacer θ par $\frac{19\pi}{12}$ dans (**)

$$\Longrightarrow z_2' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{19\pi}{24})$$

Exercice n° 17

: rectifier $\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3})$

● a) $\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3})$, on a

- $|1+i| = \sqrt{2}$

Soit θ un argument de 1 + i : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ Par suite $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

- $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$

$1+i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc $\lambda = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\,e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}$

$\Longrightarrow \lambda = 2\sqrt{2}\,e^{i(\frac{7\pi}{12})}$

$\Longrightarrow \boxed{\lambda = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})}$

b) Déterminons l'écriture cartésienne de λ :

$\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3}) = 1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}$

$\lambda = 1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$

Donc $\boxed{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$

● • $z^3 = a \Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z_k = r\,e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 2\sqrt{2}$
et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 2\sqrt{2}$ Signifie r =

Donc les racines cubiques de a sont :

$z_0 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

- $z^3=\bar{a} \Leftrightarrow z^3=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z_k'=r\,e^{i(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3=2\sqrt{2}$ et $k\in\{0,1,2\}$

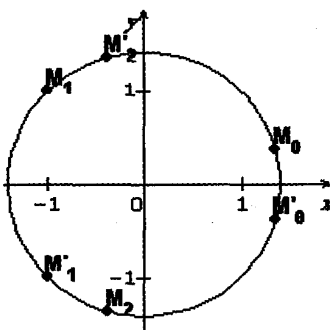
On a : $r^3=2\sqrt{2}$ Signifie $r=\sqrt{2}$

Donc les racines cubiques de $\bar{a}$ sont :

$z_0'=\overline{z_0}=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $z_1'=\overline{z_1}=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

et $z_2'=\overline{z_2}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$

- Construction des points M_0, M_1, M_2, M_0', M_1' et M_2' affixes des solutions trouvées :



● $P(z)=z^6-4z^3+8$

a) z_0 solution de (E) $\Leftrightarrow \rho(z_0)=z_0^6-4z_0^3+8=0$

$\Leftrightarrow \overline{z_0^6-4z_0^3+8=0} \Leftrightarrow \overline{z_0}^6-4\overline{z_0}^3+8=0$

Donc $\overline{z_0}$ est une solution de (E)

b) Posons $Z=z^3$

$$P(z)=0\Leftrightarrow\begin{cases}Z^2-4Z+8=0\\ Z=z^3\end{cases}$$

Résolution de : $Z^2-4Z+8=0$

$\Delta'=4-8=-4=(2i)^2 \Longrightarrow \delta=2i$

D'où $Z'=2+2i$ ou $Z''=2-2i$

Ce qui donne : $z^3=2+2i=a$ ou bien $z^3=2-2i=\bar{a}$

D'après la question 2)

$$S_C=\left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}},\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}},\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}},\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}},\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right\}$$

4) On a :

$(z-z_0).(z-\overline{z_0})=z^2-(z_0+\overline{z_0})z+z_0\overline{z_0}$

$=z^2-(2\mathrm{Re}z_0)z+|z_0|^2$

$=z^2-2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{12}).z+2$

$=z^2-2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}).z+2$

$=z^2-2\sqrt{2}\sin(\frac{7\pi}{12}).z+2$

$=z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)z+2$

De même :

$(z-z_1).(z-\overline{z_1})=z^2-(z_1+\overline{z_1})z+z_1\overline{z_1}$

$=z^2-(2\mathrm{Re}z_1)z+|z_1|^2$

$=z^2+2z+2$

$(z-z_2).(z-\overline{z_2})=z^2-(z_2+\overline{z_2})z+z_2\overline{z_2}$

$=z^2-(2\mathrm{Re}z_2)z+|z_2|^2$

$=z^2-2\sqrt{2}\cos(\frac{7\pi}{12}).z+2$

$=z^2-\left(1-\sqrt{3}\right)z+2$

$P(z)=$

$(z-z_0).(z-\overline{z_0})(z-z_1).(z-\overline{z_1})(z-z_2).(z-\overline{z_2})$

$=(z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)z+2)(z^2+2z+2)(z^2-\left(1-\sqrt{3}\right)z+2)$

$P(z)=(z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)z+2)(z^2+2z+2)(z^2-\left(1-\sqrt{3}\right)z+2)$

Exercice n° 18

$\theta\in[-\pi,\pi[$

(E) : $iz^2+(2\sin\theta)z-2i(1+\cos\theta)=0$

● a) **rectifier** $\sin^2\theta-2(1+\cos\theta)=-(1+\cos\theta)^2$

On a $\forall\ \theta\in[-\pi,\pi[$:

$\sin^2\theta-2(1+\cos\theta)=1-\cos^2\theta-2-2\cos\theta$

$=-\cos^2\theta-2\cos\theta-1$

$=-(\cos^2\theta+2\cos\theta+1)$

$=-(1+\cos\theta)^2$

b) Résolution de l'équation (E)

$\Delta'=\sin^2\theta-(-2i)i(1+\cos\theta)$

$=\sin^2\theta-2(1+\cos\theta)=-(1+\cos\theta)^2$

$\Rightarrow \delta'=i(1+\cos\theta)$

D'où $z'=\dfrac{-\sin\theta+i(1+\cos\theta)}{i}=1+\cos\theta+i\sin\theta$

$z''=\dfrac{-\sin\theta-i(1+\cos\theta)}{i}=-1-\cos\theta+i\sin\theta$

● a)

$-\overline{z'}=-\left[\overline{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}\right]=-\left[(1+\cos\theta)-i\sin\theta\right]$

$=-(1+\cos\theta)+i\sin\theta=z''$

Par suite aff (M'') = $-\overline{\text{aff (M')}}$: donc M' et M'' sont symétrique par rapport à la droite des ordonnées $(O,\vec{v})$

b)

* $z' = 1+\cos\theta + i\sin\theta = e^{i0}+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}.\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}.2\cos(\frac{\theta}{2})$

puisque $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a $\cos\frac{\theta}{2}>0$ d'où

$$\boxed{z' = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

(Pour $\theta=-\pi$: $z'=0$)

* $\forall\ \theta \in]-\pi, \pi[$:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{-\overline{z'}}{z'} = \frac{-2\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}} = -e^{-i\theta} = e^{i(\pi-\theta)}$$

c)

- $\frac{z''}{z'} = e^{i(\pi-\theta)} \Leftrightarrow \left|\frac{z''}{z'}\right| = \left|e^{i(\pi-\theta)}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \frac{|z''|}{|z'|} = \frac{OM''}{OM'} = 1 \Leftrightarrow OM'' = OM'$ ce qui prouve que le triangle OM'M" est isocèle en O

- le triangle OM'M" est équilatéral

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM''},\overrightarrow{OM'}) \equiv \pm\frac{\pi}{3}(2\pi)$

$\Leftrightarrow Arg\frac{z''}{z'} \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \pi-\theta = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\pi-\theta = -\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $\theta = \frac{4\pi}{3}+2k\pi$, $\theta \in [-\pi,\pi[$

Conclusion : $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{2\pi}{3}}$

Exercice n° 19 $\theta\in]0;\pi[$

(E) : $z^3+4z^2+\left(5-e^{2i\theta}\right)z-4i\sin\theta.e^{i\theta}=0$

● a) On sait que : $2i\sin\theta = e^{i\theta}-e^{-i\theta}$

Donc : $1+2i\sin\theta e^{i\theta} = 1+(e^{i\theta}-e^{-i\theta})e^{i\theta}$

$= 1+e^{2i\theta} - \underbrace{e^{-i\theta}e^{i\theta}}_{=1}$

$\Longrightarrow 1+2i\sin\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$

$\Longrightarrow e^{i\theta}$ est une racine carrée de $1+2i\sin\theta e^{i\theta}$

b)

* $(-2)^3+4(-2)^2+(5-e^{2i\theta})(-2)-4i\sin\theta.e^{i\theta}$

$= -8+16-10+2e^{2i\theta} - 4i\sin\theta\, e^{i\theta}$

$= -2+2e^{2i\theta} - 2(2i\sin\theta)e^{i\theta} = A$

Or d'après 1) a) : $2i\sin\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta}-1$

Donc : $A = -2+2e^{2i\theta}-2(e^{2i\theta}-1)$

$= -2+2e^{2i\theta}-2e^{2i\theta}+2 = 0$

D'où (– 2) est une solution de (E)

* résolution de l'équation (E) :

(E) est équivalente à l'équation $(z+2)\left[z^2+az+b\right]=0$

$\Leftrightarrow z^3+(a+2)z^2+(b+2a)z+2b=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2=4 \\ b+2a=5-e^{2i\theta} \\ 2b=-4i\sin\theta e^{i\theta}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2i\sin\theta e^{i\theta}\end{cases}$$

Donc (E) est équivalente à l'équation :

$(z+2)(z^2+2z-2i\sin\theta.e^{i\theta})=0$

$\Leftrightarrow$

$(z+2)=0$ Où $(z^2+2z-2i\sin\theta e^{i\theta})=0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2+2z-2i\sin\theta e^{i\theta}=0$

$\Delta' = 1+2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2 \Longrightarrow \delta = e^{i\theta}$

D'ou $z_1 = -1+e^{i\theta}$, $z_2 = -1-e^{i\theta}$

$\Longrightarrow S_{\mathbb{C}} = \left\{-2, -1+e^{i\theta}, -1-e^{i\theta}\right\}$

● a)

* $z_1 = -1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$\boxed{z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}}$$

* $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+e^{i\theta}}{-1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})}{-e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})} = -\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -i\,tg\frac{\theta}{2}$, or $\frac{\theta}{2}\in]0,\frac{\pi}{2}[$

Donc $tg\frac{\theta}{2}>0$ et par suite : $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = tg\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

b) On a $\frac{z_1+z_2}{2} = -1 = z_I$

Conclusion $\forall\ \theta \in]0,\pi[$, M_1 et M_2 sont symétriques par rapport au point I avec $z_I = -1$

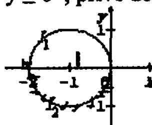
c) Ensemble Γ_1 des points M_1 :

On a : $z_1 = -1+e^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - (-1) = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_I| = |e^{i\theta}| = 1 \Leftrightarrow IM_1 = 1$ et $\theta \in]0, \pi[$

Donc l'ensemble Γ_1 des points M_1 est le demi – cercle de centre I et de rayon 1 privé de A et O situés dans le demi plan $y \geq 0$

Puisque $S_I(M_1) = M_2$, on en déduit que Γ_2 est le demi cercle de centre I et de rayon 1 situés dans le demi plan $y \leq 0$, privé de A et O



d) I milieu du segment $[M_1M_2]$ et I est le milieu du segment [OA] car : $\frac{z_A+z_O}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 = z_I$

Donc $[M_1M_2]$ et [OA] ont même milieu ce qui prouve que le quadrilatère OM_1AM_2 est un parallélogramme (1)

Aussi on a : $\frac{aff(\overrightarrow{OM_1})}{aff(\overrightarrow{OM_2})} = \frac{z_1}{z_2} = -i\,tg\frac{\theta}{2}$ imaginaire pur donc $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$ (2)

(1) + (2) donne : OM_1AM_2 est un rectangle

- Pour que OM_1AM_2 soit un carré il suffit que :

$OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|-itg\frac{\theta}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|tg\frac{\theta}{2}\right| = 1$, or $tg\frac{\theta}{2} > 0$

D'où $\left|tg\frac{\theta}{2}\right| = tg\frac{\theta}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, comme $\theta \in]0, \pi[$

Alors pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: OM_1AM_2 est un carré

Exercice n° 20 $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

● a)

- $z_1 = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ donc $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

D'où $z_1 = = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$

$$|z_1| = 2\sin\frac{\theta}{2} \text{ et } \text{Arg}(z_1) \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

- $z_2 = 1 - e^{3i\theta} =$
$e^{i\frac{3\theta}{2}}(e^{-i\frac{3\theta}{2}} - e^{i\frac{3\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{3\theta}{2}e^{i\frac{3\theta}{2}}$

Comme $\frac{3\theta}{2} \in]0, \frac{3\pi}{4}[$ donc $\sin\frac{3\theta}{2} > 0$

D'où $z_2 = = 2\sin\frac{3\theta}{2}e^{i(\frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$

$$|z_2| = 2\sin\frac{3\theta}{2} \text{ et } \text{Arg}(z_2) \equiv \frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

b) On a : $a^3 - b^3 = (a-b).(a^2+ab+b^2)$

$\Leftrightarrow \frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$

Posons $a = 1$ et $b = e^{i\theta}$ donc $a^3 = 1$ et $b^3 = e^{3i\theta}$

D'où : $\frac{1-e^{3i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

$\Rightarrow z_3 = \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow |z_3| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \Leftrightarrow |z_3| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$

$\Rightarrow |z_3| = \frac{2\sin\frac{3\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

Aussi on a : $\text{Arg}(z_3) \equiv Arg(z_2) - Arg(z_1)[2\pi]$
$\equiv (\frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) - (\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})[2\pi]$
$\equiv \theta[2\pi]$

<u>Conclusion</u> : $\text{Arg}(z_3) \equiv \theta[2\pi]$ et $|z_3| = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

● $(E_\theta): z^2 - (2+e^{2i\theta})z + 1 - e^{3i\theta} = 0$

$\Delta = (2+e^{2i\theta})^2 - 4(1-e^{3i\theta})$
$= 4 + 4e^{2i\theta} + e^{4i\theta} - 4 + 4e^{3i\theta}$
$= e^{2i\theta}(4 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}) = e^{2i\theta}(2+e^{i\theta})^2$
$= [e^{i\theta}(2+e^{i\theta})]^2$

$\Longrightarrow \delta = e^{i\theta}(2+e^{i\theta}) = 2e^{i\theta} + 2e^{2i\theta}$

D'où

$z' = \frac{2+e^{2i\theta}+2e^{i\theta}+e^{2i\theta}}{2} = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} = z_3$

$$\Longrightarrow \boxed{z' = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\theta}}$$

$$z'' = \frac{2+e^{2i\theta}-2e^{i\theta}-e^{2i\theta}}{2} = 1-e^{i\theta} = z_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{z'' = 2\sin\frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}}$$

Exercice n° 21 $\alpha \in]0;\pi[$

$$P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$$

● a) $P(1) = 1 - (1-2\sin\alpha) + 1 - 2\sin\alpha - 1$
$= 1 - 1 + 2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha - 1 = 0$

b) On a P (1) = 0 donc

w = 1 est une racine de P (z) = 0

D'où $P(z) = (z-1)(a.z^2 + b.z + c)$
$= a.z^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$

Par identification membre à membre on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 + 2\sin\alpha \Rightarrow b = 2\sin\alpha \\ c - b = 1 - 2\sin\alpha \\ -c = -1 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

Donc $P(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+2\sin\alpha z+1) = 0$

$\Leftrightarrow z - 1 = 0$ ou $z^2 + 2\sin\alpha z + 1 = 0$

On va résoudre $z^2 + 2\sin\alpha z + 1 = 0$ en effet :

$\Delta' = \sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha = (i\cos\alpha)^2$ Donc $\delta' = i\cos\alpha$

Par suite $z' = -\sin\alpha + i\cos\alpha$
$z'' = -\sin\alpha - i\cos\alpha = \overline{z'}$

Donc : $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1 = w, z = z'$ et $z = z''$

$$S_{\mathbb{C}} = \{1, -\sin\alpha + i\cos\alpha, -\sin\alpha - i\cos\alpha\}$$

- $w = 1 = e^{i0}$

$z' = -\sin\alpha + i\cos\alpha = i(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$= e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

$z'' = \overline{z'} = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

● $u^3 = e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow u_k = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0,1,2\}$

$\Leftrightarrow u_0 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})}$, $u_1 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})}$ et $u_2 = e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})}$

● $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

● Posons $Z = (z-1)^3$ donc l'équation :
$(z-1)^6 + 2\sin\alpha(z-1)^3 + 1 = 0$ est équivalente à

$$\begin{cases} Z^2 + 2\sin\alpha.Z + 1 = 0 \\ Z = (z-1)^3 \end{cases}$$

Or les solutions de l'équation $Z^2 + 2\sin\alpha.Z + 1 = 0$ sont d'après 1) b) $Z' = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$, $Z'' = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

par suite on aura :

$(z-1)^3 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ ou $(z-1)^3 = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = e^{i(-\frac{\pi}{2}-\alpha)}$

D'après 2) on trouve :

$* z_0 - 1 = u_0 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})} \Rightarrow z_0 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_0 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12})e^{i(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12})}}$$

$* z_1 - 1 = u_1 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})} \Rightarrow z_1 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_1 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}+\frac{5\pi}{12})e^{i(\frac{\alpha}{6}+\frac{5\pi}{12})}}$$

$* z_2 - 1 = u_2 = e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow z_2 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_2 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}-\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\alpha}{6}-\frac{\pi}{4})}}$$

On a : $u^3 = e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow \overline{(u^3)} = \overline{u}^3 = \overline{e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}} = e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$

Donc si u_k est une racine cubique de $e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ alors $\overline{u_k}$ est une racine cubique de $e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

D'où l'équation $(z-1)^3 = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ donne
$z_3 = \overline{z_0}$, $z_4 = \overline{z_1}$ et $z_5 = \overline{z_2}$

Conclusion :

$$S_{\mathbb{C}} = \{z_0, z_1, z_2, \overline{z_0}, \overline{z_1}, \overline{z_2}\}$$

Exercice n° 22 $z^2-(1+i)z+i=0$

● On a : a + b + c = 0 donc z' = 1 et $z'' = \frac{c}{a} = i$

$S_{\mathbb{C}}=\{1 ;i\}$

● $E_\theta : z^2-\left(2e^{i\theta}\cos\theta\right)z+e^{2i\theta}=0$

a) Remplaçant z par 1 dans l'équation (E_θ):

$1-2e^{i\theta}\cos\theta+e^{2i\theta}=1-2e^{i\theta}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)+e^{2i\theta}$

$=1-\underbrace{e^{i\theta}.e^{i\theta}}_{e^{2i\theta}}-\underbrace{e^{i\theta}e^{-i\theta}}_{1}+e^{2i\theta}=0$

D'où 1 est une racine de (E_θ)

b) On sait que si z' et z" sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ alors $z'.z''=\frac{c}{a}$

Donc : $1x.z''=\frac{e^{2i\theta}}{1} \Longrightarrow \boxed{z''=e^{2i\theta}}$

● a) $z_B=e^{2i\theta} \Leftrightarrow |z_B|=|e^{2i\theta}|=1$ et <u>$2\theta \in]0,\pi[$</u>

Donc OB = 1 par suite l'ensemble des points B est le demi Cercle trigonométrique privé des points A et $S_O(A)$ situés dans le demi plan $y \geq 0$

b) OACB est un losange si et seulement si OACB est un parallélogramme car OA = OB

On aura dans ce cas : $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_A=z_C-z_B$

$\Leftrightarrow z_C=z_A+z_B \Leftrightarrow \boxed{z_C=1+e^{2i\theta}}$

c) l'aire du losange OACB est égal à $\mathscr{A}=\frac{OC.AB}{2}$

Donc $\mathscr{A}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow OC.AB=1 \Leftrightarrow |z_C|.|z_B-z_C|=1$

$\Leftrightarrow |(1+e^{2i\theta}).(e^{2i\theta}-1)|=|e^{4i\theta}-1|=1$

$\Leftrightarrow |e^{2i\theta}.(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})|=\underbrace{|e^{2i\theta}|}_{1}.|2i\sin 2\theta|=1$

$\Leftrightarrow |2\sin 2\theta|=1$ et <u>$2\theta \in]0,\pi[$</u>

Donc $2\sin 2\theta=1 \Leftrightarrow \sin 2\theta=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2\theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow$

$\theta=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $\theta=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ et Comme $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$ on trouve :

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{12} \text{ ou } \theta=\frac{5\pi}{12}}$$

Exercice n° 23

● a) $z^2-2iz-2=0$

$\Delta'=i^2+2=-1+2=1$ Donc $\delta=1$

Par suite $z'=1+i$; $z''=-1+i$ $S_{\mathbb{C}}=\{1+i ;-1+i\}$

b) $z'=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z''=-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

● $\theta \in]0,\pi[$

$(E): z^2-2e^{i\theta}.z+e^{2i\theta}-1=0$

$\Delta'=(e^{i\theta})^2-(e^{2i\theta}-1)=e^{2i\theta}-e^{2i\theta}+1=1$ Donc $\delta=1$

Les solutions donc sont : $z'=1+e^{i\theta}$; $z''=-1+e^{i\theta}$

$$S_{\mathbb{C}}=\{1+e^{i\theta},-1+e^{i\theta}\}$$

●

or on a : $\cos\frac{\theta}{2}>0$ car $\frac{\theta}{2}\in]0,\frac{\pi}{2}[$ d'où

$\boxed{z_2=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}$

$z_3=-1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})=2i\sin\frac{\theta}{2}e$

or on a : $\sin\frac{\theta}{2}>0$ car $\frac{\theta}{2}\in]0,\frac{\pi}{2}[$ d'où

$\boxed{z_3=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}}$

b) On a : $\frac{z_B+z_C}{2}=e^{i\theta}=\frac{z_O+z_A}{2}$ d'où les segments [BC] et [OA] ont même milieu ce qui prouve que OBAC est un parallélogramme

$OA=|z_1|=2$

$BC=|z_C-z_B|=|-1+e^{i\theta}-1-e^{i\theta}|=|-2|=2$

OA = BC donc les diagonales du parallélogramme OBAC sont isométriques d'où c'est un rectangle

c) OBAC est un carré si et seulement si : OB = OC

$\Leftrightarrow |z_B|=|z_C| \Leftrightarrow 2\sin\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow tg\,\frac{\theta}{2}=1$

$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Puisque $\theta \in]0,\pi[$ on trouve $\theta=\frac{\pi}{2}$.

RÉSUMÉ DU COURS

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et par $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et $\mathscr{W}$ muni de la base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ et A, B, C et D quatre points de l'espace $\mathscr{E}$ tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$

  ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires) équivaut à (A, B, C et D appartiennent à un même plan).

* Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$. On a :

  ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) équivaut à ($\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$).

  ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires) équivaut à ($\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$).

* Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.

  Une représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$ est de la forme

  $$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

  $D(A, \vec{u})$ et $D(A', \vec{v})$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

* Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace $\mathscr{E}$.

Une représentation paramétrique du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ est de la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \; ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

* Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est celle d'un plan. Et tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

* Soit $P : ax + by + cz + d = 0$ un plan de l'espace $\mathscr{E}$ et soit $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

$\vec{u}$ est un vecteur du plan P, si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

* Soient deux plans $P : ax + by + cz + d = 0$ et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

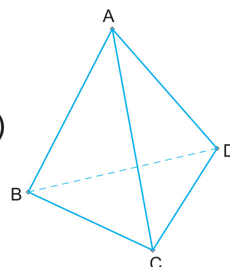
avec a', b' et c' trois réels non nuls. On a $(P // P') \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$.

* Deux plans sont parallèles si tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre.
* Deux plans sont sécants si et seulement si il existe un vecteur de l'un qui n'est pas un vecteur de l'autre.
* Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est un vecteur de ce plan.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité

ABCD est un tétraèdre régulier de côté a. Soit M un point du segment [BC] et P le plan perpendiculaire à [BC] passant par M. La section du tétraèdre par ce plan est un triangle MNP. Soit G le centre de gravité du triangle MNP. Il s'agit de déterminer l'ensemble des points G lorsque M décrit le segment [BC].



Recherche d'une conjecture avec Geospace W :

Définir un réel a libre dans [0,10] et les points A, B, C et D sachant que le repère orthonormal R_{xyz} est le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ défini par : O est le centre de gravité de la face BCD.

$\vec{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{DB}$ et de même sens.

$\vec{j}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OC}$ et de même sens.

$\vec{k}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ et de même sens.

Créer / Solide / Polyèdre convexe / Défini par ses sommets : permet de construire le tétraèdre ABCD nommé P_y.

Après avoir placé un point libre M sur le segment [BC], en sélectionnant :

Créer / Plan / perpendiculaire à une droite, définir le plan Q passant par M et orthogonal à [BC].

Créer / Ligne / Polygone convexe / Section d'un polyèdre par un plan : permet de visualiser la section du tétraèdre ABCD par le plan.

En déplaçant le point M sur le segment [BC], préciser :

a) La nature de la section du tétraèdre ABCD par le plan Q.

b) La section de ABCD par le plan Q lorsque M est le milieu I de [BC].

On suppose que le point M est sur le segment [BI].

Définir les points N et P, intersections du plan Q avec les segments [AD] et [AB]. Construire G en sélectionnant : Créer / Point / Centre divers / Centre de gravité.

En sélectionnant Divers / Modifier, modifier M comme point libre sur le segment [BI].

En utilisant Créer / Ligne / Courbe / Lieu de points : tracer l'ensemble des points G lorsque M décrit le segment [BI].

En utilisant les symétries de la figure, conjecturer l'ensemble des points G.

Une stratégie de justification de la conjecture :

On se place dans le repère cartésien $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$. Si le point M est sur le segment [BI], il a pour coordonnées (x,0,0) avec $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Montrer que G a pour coordonnées $\left(\frac{x}{3}, \frac{2x}{3}, \frac{2x}{3}\right)$ puis que : $\overrightarrow{BG} = \frac{2x}{3}\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right)$.

Soit G_1 le centre de gravité du triangle IAD. On a : $\overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{G_1D} + \overrightarrow{G_1A} = \vec{0}$

Montrer que, pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{BG} = 2x\,\overrightarrow{BG_1}$.

En déduire l'ensemble des points G lorsque M est un point du segment [BI].

Déterminer l'ensemble des points G lorsque M décrit le segment [BC].

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Dans l'ensemble $\mathscr{W}$ muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteurs :

$\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{u'} = a\vec{i} + 2\vec{j} + b\vec{k}$

$\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{v'} = 4\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$

$\vec{w} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{w'} = -5\vec{i} + \lambda\vec{j} + \mu\vec{k}$

a) Déterminer les réels a et b tels que $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ soient colinéaires.

b) Déterminer les réels α et β tels que $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ soient colinéaires.

c) Déterminer les réels λ et μ tels que $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ soient colinéaires.

2 l'ensemble $\mathscr{W}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$;

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

3 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

on donne les points

A(1,-1,1) ; B(2,-2,2); C(1,0,1) et D(0, 0,3).

Etudier la position relative des droites (AB) et (CD) dans l'espace.

4 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

on donne les points

A(1, 0, 2) ; B(-1, 1, 4) ; C(5,-1, 2).

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Donner une représentation paramétrique du plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) Soit le point D(2, 3, 3).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AD).

b) Etudier la position relative de la droite (AD) et du plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

5 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathscr{W}$ définis par :

$\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} - 9\vec{k}$

et le point A(1, 1, 4) de $\mathscr{E}$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan P qui passe par A et qui admet le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ comme vecteurs directeurs.

2) Existe-t-il des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$? Justifier la réponse .

6 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points A(1, -2, 1) ; B(2, -1, -2) et C(1,0, 1).

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P de l'espace $\mathscr{E}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P

c) Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur de P.

2) Déterminer, dans chacun des cas suivants, la position relative de la droite D avec le plan P :

a) $D = D(A, -2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k})$

b) $D = D(O, -2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k})$

c) $D = D(B, -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$

7 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient D et D' les droites définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$D : \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 3\alpha + 2, \ \alpha \in \mathbb{R} \ ; \\ z = \alpha - 4 \end{cases}$$

$$D' : \begin{cases} x = 1 - 2\beta \\ y = 3 - \beta \quad , \beta \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2\beta \end{cases}$$

a) Donner un vecteur $\vec{u}$ directeur de D et un vecteur directeur de D'.

b) Montrer que D et D' ne sont pas parallèles.

c) Déterminer l'intersection de D et D' et conclure sur la position relative de ces deux droites.

8 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Dans chacun des cas suivants , étudier la position relative des plans P et P' :

a) P: $x - y + z + 1 = 0$; P': $-x + y - z = 0$

b) P: $2x + y + z - 2 = 0$; P': $x - y - z = 0$

c) P: $2x - y + z + 1 = 0$; P': $x + 2y + 3z - 1 = 0$

d) P: $x + 2z - 1 = 0$; P': $y - 2z + 4 = 0$

e) P: $2x - 3y + 2z - 4 = 0$

$$P' : \begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 1 - 2t + s ; \ (t, s) \in \mathbb{R}^2 \\ z = t + 3s \end{cases}$$

f) $$P : \begin{cases} x = 1 + m - p \\ y = 2 - m - p \quad ; (m, p) \in \mathbb{R}^2 \\ z = -1 + m - 2p \end{cases}$$

$$P' : \begin{cases} x = -2 - 2t + 2s \\ y = 5 + 2t + 2s \quad ; (t, s) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 4 - 2t + 4s \end{cases}$$

9 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points :

A(1,0, 2) ; B(-1, 2, 1) ; C(0, 1, 1).

a) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P parallèle au plan (ABC) et passant par le point I(0, 2 , -3).

10 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Déterminer l'intersection de la droite D et du plan P dans chacun des cas suivants

a) $$D : \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 3\alpha + 2, \ \alpha \in \mathbb{R} \ ; \\ z = \alpha - 4 \end{cases}$$

P : $x + y + z + 4 = 0$

b) P: $x - y + z - 2 = 0$

et D : $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$

c) $D:\begin{cases} x=\alpha+1 \\ y=-2\alpha \\ z=-\alpha+1 \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}$;

$P:\begin{cases} x=3+2\alpha+3\beta \\ y=\alpha-4\beta \\ z=2+\alpha+\beta \end{cases}, (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

d) $D:\begin{cases} x+y-3z+2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$;

$P: x-y+z+1=0$

11 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1) Déterminer l'intersection deux à deux des trois plans suivants :

$P: 2x-y+z-3=0$;

$Q: x+2y+z-1=0$ et $R: 3x+y-z+2=0$

2) Déterminer l'intersection de ces trois plans.

Exercice n° 1

a) $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{a}{4}=\frac{2}{3}=\frac{b}{1}$

Donc $a=\frac{8}{3}$ et $b=\frac{2}{3}$

b) $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix}=0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow -2\alpha-12=0$ et $0+2\beta=0$

$\Leftrightarrow \alpha=-6$ et $\beta=0$

c) $\vec{W}$ et $\vec{W}'$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \frac{-5}{-3}=\frac{\lambda}{2}=\frac{\mu}{1} \Rightarrow \lambda=\frac{10}{3}$ et $\mu=\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{10}{3}$ et $\mu=\frac{5}{3}$

Exercice n° 2

a) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

$=1\times\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

$=13-0-30=-17\neq 0$ Donc $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

b) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$=-2\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$=-6+21-2=13\neq 0$ Donc $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

c) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$=-2\times\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-(-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$=10+3+1=14\neq 0$ Donc $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

Exercice n° 3

- $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

D'où (AB) et (CD) sont non parallèles (1)

- $(AB):\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-1-\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$, $\alpha \in$ IR

- $(CD):\begin{cases} x=-\beta \\ y=0 \\ z=3+2\beta \end{cases}$, $\beta \in$ IR

$M\in(AB)\cap(CD) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\alpha=-\beta \ (1) \\ -1-\alpha=0 \ (2) \\ 1+\alpha=3+2\beta \ (3) \end{cases}$ $(\alpha,\beta)\in$ IR

(1) et (2) donne $\alpha=-1$ et $\beta=0$

Or d'après (3) : $0=3$ impossible

Donc $(AB)\cap(CD)=\varnothing$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ (AB) et (CD) sont non coplanaires

<u>Conclusion</u> : **(AB) et (CD) sont non coplanaires**

Exercice n° 4

a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a $\frac{-2}{4}\neq\frac{1}{-1}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}):\begin{cases} x=1-2\alpha+4\beta \\ y=\alpha-\beta \\ z=2+2\alpha \end{cases}$ avec $(\alpha,\beta)\in\Re^2$

c) On a : $x + z = 3 + 4\beta$ et $2\alpha = z - 2$

Donc $4\beta = x + z - 3$ et $2\alpha = z - 2$
D'ou
$4y = 4\alpha - 4\beta = 2z - 4 + 3 - x - z$.

$\Rightarrow x + 4y - z + 1 = 0$

Finalement

$$P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) : x + 4y - z + 1 = 0$$

● a) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ A(1,0,2)

$$(AD) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \Re$$

b) Remplaçons les coordonnées du point D dans l'équation cartésienne du plan P : on aura :
$2 + 4 \times 3 - 3 + 1 = 12 \neq 0$

Donc $D \notin P$ et par suite la droite (AD) et le plan P sont sécants en A.

Exercice n° 5

● $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ A(1,1,4)

une équation paramétrique du plan P est :

$$P : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha + \beta & (1) \\ y = 1 + 3\alpha - \beta & (2) \\ z = 4 - \alpha - 2\beta & (3) \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

$(1)+(2) \Rightarrow \alpha = x+y-1 \Rightarrow \beta = x-1+2(x+y-1) = 3x+2y-3$

$(3) \Rightarrow z = 4-(x+y-1)-2(3x+2y-3) = -7x-5y+11$

$\Rightarrow 7x+5y+z-11=0$

Conclusion: **Une équation cartesienne du plan P est : $7x+5y+z-11=0$**

● $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= -14 + 15 - 1 = 0$

Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires d'ou ils existent deux réels a et b vérifiant $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

(On a : $\vec{w} = \vec{u} + 4\vec{v}$ (résolution du système))

Exercice n° 6

● a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignées ; ils déterminent donc un plan P de l'espace ξ

b) une équation cartésienne du plan P est de la forme :
P : ax +by +cz+d=0

$A(1 ;-2 ;1) \in P \Rightarrow a-2b+c+d=0$

$B(2;-1;-2) \in P \Rightarrow 2a-b-2c+d=0$

$C(1;0;1) \in P \Rightarrow a+c+d=0$

On obtient ainsi le système (S) suivant:

$$\begin{cases} a-2b+c+d=0 \\ 2a-b-2c+d=0 \\ a+c+d=0 \end{cases}$$

une résolution de ce système donne :
$a=4c$; $b=-c$ et $d=-5c$

Donc une équation cartésienne de P est :

P : $4x - y + z - 5 = 0$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur de P signifie que

$4 \times (-2) + 3 \times (-1) + m = 0 \Leftrightarrow m = 11$

● a) $\overrightarrow{U_D}$ vecteur de D

$\overrightarrow{U_D}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, comme $m \neq 11$ donc $\overrightarrow{U_D}$ n'est pas un vecteur directeur de P et par la suite **D et P sont sécantes en A.**

b) $\overrightarrow{U_D}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $m \neq 11$. Donc D et P sont sécantes.

Cherchons le point d'intersection de P et D, en effet :

$$D : \begin{cases} x = -2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}, t \in IR$$

$M(x,y,z) \in P \cap D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t & (1) \\ y = 3t & (2) \\ z = 3t & (3) \\ 4x - y + z - 5 = 0 & (4) \end{cases}$$

En remplacent (1), (2) , (3) dans (4) on trouve :

$-8t - 3t + 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-5}{8}$

D'où $P \cap D : \left\{ M\left(\frac{5}{4}, \frac{-15}{8}, \frac{-15}{8}\right) \right\}$

c) $\overrightarrow{U_D} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme $m \neq 11$ donc $\overrightarrow{U_D}$ n'est pas un vecteur directeur de P et par la suite D et P sont sécantes en B.

conclusion : **D et P sont sécantes en B.**

Exercice n° 7

a) $\overrightarrow{U_D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de D

$\overrightarrow{U_{D'}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de D'

b) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0$

Donc $\overrightarrow{U_D}$ et $\overrightarrow{U_{D'}}$ non colinéaires et par suite les droites D et D' ne sont pas parallèles **(1)**

c) M (x, y, z) $\in D \cap D'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 3\alpha + 2 \\ z = \alpha - 4 \\ x = 1 - 2\beta \\ y = 3 - \beta \\ z = 1 + 2\beta \end{cases} \quad \text{Avec } (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 = 1 - 2\beta \\ y = 3\alpha + 2 = 3 - \beta \\ z = \alpha - 4 = 1 + 2\beta \end{cases} \quad \text{Avec } (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

(1) + (3) donne -3 = 2 impossible
Donc le système n'a pas des solutions
d'où $D \cap D' = \varnothing$ **(2)**

Conclusion : D et D' sont non coplanaires.

Exercice n° 8

a) $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = -1$. Donc P // P'(strictement//)

b) $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$: P et P' sont sécants

c) $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$ donc P et P' sont sécants.

d) $\frac{0}{1} \neq \frac{2}{-2}$: P et P' sécants

e) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur de P'

2x(-1)-3x1+2x0=-5≠0 donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur de P **Donc P et P' sont sécants**

f) Déterminons une équation cartésienne de P et de P'

- <u>pour le plan P.</u>

$x + y = 3 - 2p \Rightarrow 2p = 3 - x - y$
$x - y = 2m - 1 \Rightarrow 2m = x - y + 1$

On a :

$2z = -2 + 2m - 2 \times 2p = -2 + (x - y + 1) - 2.(3 - x - y)$

Donc $\boxed{P : 3x + y - 2z - 7 = 0}$

<u>Pour le plan P'</u>

$x + y = 3 + 4s \Rightarrow 4s = x + y - 3$
$y - x = 7 + 4t \Rightarrow 4t = y - x - 7$

D'où

$2z = 8 - 4t + 2 \times 4s = 8 - y + x + 2x + 2y - 6$
$= 9 + y + 3x$

Donc

$\boxed{P' : 3x + y - 2z + 9 = 0}$

Par suite $\frac{3}{3} = \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2}$ d'où P // P'

Exercice n° 9

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ A(1 ;0 ;2)

Donc

$$(ABC) : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha - \beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 2 - \alpha - \beta \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

b) Cherchons une équation cartésienne de (ABC)

On a : $x + y = 1 - 2\alpha - \beta + 2\alpha + \beta = 1$

Donc : $\boxed{(ABC) : x+y-1=0}$

$P // (ABC) \Leftrightarrow \quad P : x+y+d=0$

Comme $I(0, 2, -3) \in P$ on aura $d=-2$

Donc $\boxed{P:\ x+y-2=0}$

Exercice n° 10

a)

$$M(x,y,z) \in P \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha+1 \\ y=3\alpha+2 \\ z=\alpha-4 \\ x+y+z+4=0 \end{cases}$$

Remplacent les expressions de x, y et z en fonction de α dans l'équation du P.

On aura :

$-\alpha+1+3\alpha+2+\alpha-4+4=0$

$\Rightarrow 3\alpha+3=0 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow x=2$;$y=-1$ et $z=-5$

Donc **$P \cap D = \{M(2,-1,-5)\}$**

b) Equations paramétriques de D :

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\alpha+3 \\ y=2\alpha-1 \quad \text{avec } \alpha \in \Re \\ z=3\alpha-2 \end{cases}$$

Remplacent x, y et z en fonction de α dans l'équation cartésienne de P. On aura :

$2\alpha+3-2\alpha+1+3\alpha-2-2=0 \Rightarrow \alpha=0$

donc **$P \cap D = \{M(3,-1,-2)\}$**

c) Cherchons une équation cartésienne de P

En effet on a :

$y+4z=8+5\alpha \Rightarrow 5\alpha=y+4z-8$

$z-y=2+5\beta \quad \Rightarrow 5\beta = z-y-2$

Donc $5x = 15+2.\,5\alpha+3.\,5\beta$

$= 15+2y+8z-16+3z-3y-6$

$= -7-y+11z$

Donc (P) : $5x+y-11z+7=0$

Maintenant remplacent x, y et z de l'équation paramétrique de D dans l'équation cartésienne de P.

On aura : $5(\alpha+1)-2\alpha-11(-\alpha+1)+7=0$

$\Rightarrow 5\alpha+5-2\alpha+11\alpha-11+7=01 \Rightarrow 4\alpha+1=0$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{14}$

$P \cap D : \{M(\frac{13}{14}, \frac{1}{7}, \frac{15}{14})\}$

d) Déterminant une représentation paramétrique de D

On posera $z=\alpha$, $\alpha \in \Re$

$$D : \begin{cases} x+y-3z+2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x-z+1=0$

$(1)-(2) \Rightarrow 2y-5z+3=0$

D'où $x = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$ et $y = \frac{5}{2}z - \frac{3}{2}$

$$D : \begin{cases} x = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2}\alpha - \frac{3}{2} \qquad \alpha \in \Re \\ z=\alpha \end{cases}$$

Remplacent par la suite x, y et z dans l'équation de P, on aura

$\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha + \frac{3}{2} + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow -\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha = 2$

D'où $P \cap D = \{M(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 2)\}$

Exercice n° 11

- $P : 2x-y+z-3=0$
  $Q : x+2y+z-1=0$

On a : $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$

Donc P et Q sont sécants suivant la droite D avec :

$$D : \begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$$

- $P : 2x-y+z-3=0$
  $R : 3x+y-z+2=0$

$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{1} \quad \Rightarrow$ P et R sont sécants suivant la droite

$$\Delta : \begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ 3x+y-z+2=0 \end{cases}$$

- $R : 3x+y-z+2=0$
  $Q : x+2y+z-1=0$

$\frac{3}{1} \neq \frac{1}{2}$ Donc R et q sont sécants suivant la droite

$$\Delta' \begin{cases} 3x+y-z+2=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$$

● M (x, y, z) $\in P \cap Q \cap R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \quad (1) \\ x + 2y + z - 1 = 0 \quad (2) \\ 3x + y - z + 2 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) - (3) \Rightarrow 3z - 6 = 0 \Rightarrow z = 2$

$(1) + (3) \Rightarrow 5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Dans (1) on a : $y = 2x + z - 3 = \frac{2}{5} + 2 - 3 = \frac{-3}{5}$

Finalement :

$$\mathbf{P \cap Q \cap R = \{M(\frac{1}{5}, \frac{-3}{5}, 2)\}}$$

RÉSUMÉ DU COURS

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$
$\mathscr{W}$ est l'ensemble des vecteurs de l'espace $\mathscr{E}$.

* Soient A, B et C trois points deux à deux distincts de l'espace.

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$

* Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

$\mathscr{W}$ est muni d'une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Pour tous vecteurs

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$

* Soit, dans l'espace $\mathscr{E}$, le plan P d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0,0)$ et soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{E}$.

Le vecteur $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

La distance du point A au plan P est donnée par la formule :

$$d(A, P) = AH = \frac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

* Soient les plans $P : ax + by + cz + d = 0$ et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ On a :

- $P // P' \Leftrightarrow \overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{N'}$ sont colinéaires.
- $P \perp P' \Leftrightarrow \overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{N'}$ sont orthogonaux.
- $D(A, \overrightarrow{u}) // P \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux.
- $D(A, \overrightarrow{u}) \perp P \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires.

* Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de $\mathscr{W}$ alors le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur nul.

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le produit vectoriel de $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$,

noté $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :
1/ $\vec{w}$ est normal au plan (ABC)
2/ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe de $\mathscr{W}$
3/ $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \left|\sin\left(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}\right)\right|$

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ et α un réel . On a :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$; $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$;

$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$; $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$.

* Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathscr{W}$, si on a

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$

$= \left(yz' - zy'\right)\vec{i} - \left(xz' - zx'\right)\vec{j} + \left(xy' - yx'\right)\vec{k}$

* Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathscr{W}$. Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, alors on a :

$$|\sin\theta| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

* Si P est un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan P.

* Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathscr{E}$. L'aire du triangle ABC est :

$$\frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On appelle produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le réel $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ On le note $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

* Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$. On a :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

* Soient $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $\mathscr{W}$. On a :
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$.

* Soient ABCDA'B'C'D' un parallélépipède et $\mathscr{V}$ son volume.

On a : $\mathscr{V} = \left| (\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}) \right|$.

* Soit ABCD un tétraèdre, υ son volume et h la hauteur issue de A. On a :

$$\upsilon = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \right| \quad \text{et} \quad h = \frac{\left| \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right) \right|}{\left\| \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \right\|}.$$

* Soient $D(A,\vec{u})$ et $D'(A',\vec{u'})$ deux droites non coplanaires de l'espace $\mathscr{E}$.
H et H' les intersections de D et D' avec leur perpendiculaire commune.

La distance entre D et D' est $HH' = \dfrac{\left| \left(\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'}\right) \right|}{\left\| \vec{u} \wedge \vec{u'} \right\|}$.

* La distance d'un point A à une droite $\Delta = D\left(B,\vec{u}\right)$ est le réel $\dfrac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} \right\|}{\left\| \vec{u} \right\|}$

* Soient I(a,b,c) un point de l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et R un réel positif. Une équation cartésienne de la sphère S(I,R) de centre I et de rayon R est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

* Soit S une sphère de centre I et de rayon R et P un plan de l'espace. On désigne par H le projeté orthogonal du point I sur le plan P et on pose d = IH.
  * Si $d > R$ alors $P \cap S = \varnothing$ et on dit que P et S sont disjoints.
  * Si $d = R$ alors $P \cap S = \{H\}$ et on dit que P et S sont tangents en H.
  * Si $d < R$ alors $P \cap S$ est le cercle du plan P de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ et on dit que P et S sont sécants suivant ce cercle.

AVEC L'ORDINATEUR

Activité 1

Soient S1 et S2 deux sphères de même centre o et de rayons respectifs 3 et 5.
P est le plan d'équation cartésienne Z = m où m est un paramètre réel tel que -3 < m < 3.
C1 est l'intersection du plan P avec S1 et C2 est l'intersection du plan P avec S2.
A1 désigne l'aire de C1 et A2 désigne l'aire de C2. On note A = A2 - A1 et on se propose de montrer que la valeur de A est constante.

Recherche d'une conjecture avec Geospace W :

Afficher le repère R_{xyz} du logiciel.
Créer /Solide/ sphère : S1 de centre o et de rayon 3.
Bis / S2 de centre o et de rayon 5
Créer /Numérique variable réelle libre m dans un intervalle -3 __ 3.
Créer/ le plan P définie par son équation Z - m =0.
Créer / ligne / cercle / la section C1 de la sphère S1 par le plan P.
Bis : P ; S2 ; C2.
Créer / numérique / mesure géométriques / l'aire A1 du convexe C1.
Bis : A2 du convexe C2.
Créer / numérique / calcul algébrique A2 - A1 et nommer cette différence A.
Créer / affichage / valeur déjà défini A1 ; (3 chiffres après la virgule) ; aff0.
Bis A2 ; (3 chiffres après la virgule) ; aff1.
Bis A ; (3 chiffres après la virgule) ; aff2.
Piloter avec les flèches de direction du clavier. Que peut-on conjecturer ?

Une stratégie de justification de la conjecture :

Déterminer, en fonction de m, la distance de o au plan P.
Calculer, en fonction de m, les rayons r_1 et r_2 respectifs des cercles C1 et C2.
Calculer, en fonction de m, les aires respectives A1 et A2 des cercles C1 et C2.
En déduire que l'aire A de la couronne est indépendante de m et donner sa valeur.

Activité 2

Soit A(-1 ; -1 ; 1) ; B(-1 ; 2 ; -2) et P : X + Y + Z - 2 = 0. Pour tout réel m on considère la sphère S_m de centre I(-1 ; m ; -m) et de rayon $R_m = \sqrt{m^2 - m + 1}$.
On se propose de vérifier que le point I_m décrit la droite (AB) et puis étudier suivant les valeurs de m la position relative de P et S_m.

Utiliser le logiciel Geospace W pour :

Créer /point / repérer dans l'espace/ A de coordonnées : -1 -1 1.
Bis / B de coordonnées : -1 2 -2.

Créer / le plan P défini par son équation X + Y + Z - 2 = 0.
Créer / point libre dans un plan P : nommer ce point C (Bis pour D, E et F)
Créer / ligne / polygone défini par ces sommets C D E F (déplacer ces points pour avoir la forme d'un parallélogramme illustrant le plan P et hachurer ce quadrilatère)
Créer /numérique / variable réelle libre dans l'intervalle -8   8 et la nommer m.
Créer / point repéré dans l'espace/ de nom I et de coordonnées : -1 m   -m.
Créer / numérique / calcul algébrique / l'expression R_m égale à Rac(m^2 - m+1).
Créer / solide / sphère / de centre I de rayon R_m et de nom S_m.
Créer / ligne / cercle / la section C_m de la sphère S_m par le plan P.
Piloter avec les flèches du clavier et donner une conjecture puis la justifier.

EXERCICES ET PROBLÈMES

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1 Calculer $\vec{u} . \vec{v}$ dans chacun des cas suivants

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{2}\\3\end{pmatrix}$

2 On donne un tétraèdre régulier ABCD (toutes ses arêtes ont même longueur que l'on notera a où a est un réel strictement positif)

1)Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$ et que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$

2) a)Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$
b)Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) , (AC) et (BD) , (AD) et (BC) ?

3) a)En écrivant $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$, calculer $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CD} . \overrightarrow{IJ}$.
b)Que représente la droite (IJ) pour le couple de droites (AB) et (CD) ?
c)Calculer les distances des droites (AB) et (CD) ; (AC) et (BD) ; (AD) et (BC) .

3 Donner une équation cartésienne du plan passant par A(1,-2,3) et de vecteur normal

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

4 Donner une équation cartésienne du plan passant par le point A(0,1,-2) et perpendiculaire à la droite (CD) telle que C(-1,1,-1) et D(0-3,2).

5 Donner un système d'équations paramétriques de la droite perpendiculaire au plan P : 2x - 3y + z = 0 et passant par le point I(4,-2,0).

6 Ecrire une équation cartésienne du plan P sachant que le projeté orthogonal de l'origine O du repère sur ce plan est le point D (1,-2,3)

7 Dans chacun des cas suivants , étudier la position relative des plans P et P'

P : x - y + z + 1 = 0 et P' : -x + y - z = 0
P : 2x + y + z - 2 = 0 et P' : x - y - z = 0

8 1) Donner une équation cartésienne d'un plan admettant le vecteur $\vec{k}$ pour vecteur normal.
2) a) En déduire que les deux plans d'équations respectives x = 1 et y = 0 sont perpendiculaires.
b)Déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection.

9 Calculer la distance du point A au plan P dans chacun des cas suivants :
A(1, 0, 2) et P : 2x - y + z - 2 = 0
A(0, 0, -3) et P : 2x - 2y + z + 5 = 0
A(-1, 1, 1) et P passant par les points B(0, 1, 0) et C(1, 0, 0) et D(0, 0, 1)

10 Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$.

Déterminer $\vec{i} \wedge \vec{j}$, $\vec{i} \wedge \vec{k}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k}$

11 1) Montrer que le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires.
2) Montrer alors que les points A(1,0,1), B(1,1,0) et C(0,1,1) définissent un plan.
3) Donner une équation cartésienne de ce plan.

12 On donne les plans
P : x + y + z + 1 = 0
et P' : x - y + 2z - 1 = 0
1) préciser deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ normaux respectivement aux plans P et P'
2) Calculer le produit vectoriel $\vec{w}$ de ces deux vecteurs.
3) Déterminer la droite d'intersection de P et P'

13 Soient deux vecteurs orthogonaux. $\vec{u}$ et $\vec{v}$
Démontrer que $\vec{u} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) = -\left\|\vec{u}\right\|^2 . \vec{v}$

14 Montrer que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthonormée puis déterminer son sens.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\ \frac{1}{9}\\ \frac{-4}{9}\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{9}\\ \frac{8}{9}\\ \frac{4}{9}\end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\ \frac{-4}{9}\\ \frac{7}{9}\end{pmatrix}$$

15 Soient A et B deux points distincts et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :
1) $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{AB} = 0$
2) $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
3) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) . \overrightarrow{AB} = 0$
4) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

16 Soit un cube ABCDEFGH tel que AB = 1.
Calculer l'aire des triangles CEH, CFH et CDF.

17 Soit O un point de l'espace et $\vec{F}$ une force appliquée à un point A d'un solide indéformable.
On appelle moment de la force $\vec{F}$ au point O et on note $M_O(\vec{F})$, le vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$
1) La droite (d) définie par (A, $\vec{F}$) est appelée support de la force.
a)Soit H le projeté orthogonal de O sur (d), montrer que $\left\| M_O(\vec{F}) \right\| = OH.\left\| \vec{F} \right\|$.
b)En déduire que deux forces de même vecteur et de même support ont même moment en tout point de l'espace.
2) Soit O' un point de l'espace, montrer que le moment de $\vec{F}$ en O' est égal à la somme du moment de $\vec{F}$ en O et du vecteur $\vec{F} \wedge \overrightarrow{OO'}$.
3) Montrer que si trois forces ont une résultante nulle et si le système formé par ces trois forces a un moment nul par rapport à un point quelconque de l'espace, alors les supports des forces sont coplanaires.

18 Soient P et Q les plans définis par
P : x + 2y - 3z = 0
et Q : 2x - y + z - 3 = 0.
1) Montrer que P et Q sont sécants. Soit D leur droite d'intersection.
2) Déterminer un vecteur directeur de D.
3) Donner une équation cartésienne du plan R passant par l'origine O du repère et perpendiculaire à D.
4) Préciser les coordonnées du point I intersection de R avec D.

19 Soient les quatre points A, B, C et D de coordonnées
A$(1, 0, \sqrt{2})$, B$(-1, 0, \sqrt{2})$, C(0, -1, 0) et D(0, 1, 0).
1) Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires.
2) Quelle est la nature du tétraèdre ABCD ?
3) Calculer la hauteur de ce tétraèdre.
4) Soit a un réel de $[0,\sqrt{2}]$ et P_a le plan d'équation cartésienne $z = a$.
a) Montrer que P_a rencontre les droites (AC), (AD) , (BD) et (BC) en quatre points F, G, H et I.
b) Préciser la nature du quadrilatère FGHI.
5) a) Calculer le périmètre p(a) et l'aire s(a) du quadrilatère FGHI.
b) Préciser les extremums de p(a) et de s(a).

20 On donne les plans
$P : 3x - 2y + 5z - 1 = 0$
et $Q : 2x - 3y + 2z - 2 = 0$.
1) Montrer que P et Q se rencontrent suivant une droite D.
2) Soient a et b deux réels non tous nuls.
a) Montrer que la relation :
$a(3x -2y + 5z - 1) +b(2x -3y + 2z - 2) = 0$
est l'équation cartésienne d'un plan contenant la droite D.
b) En déduire une équation cartésienne du plan R passant par le point I(2,5,0) et contenant la droite D.
3) Déterminer une équation cartésienne du plan S perpendiculaire à P et contenant D.
4) a) Calculer les distances du point A aux plans P et S et à la droite D.
b) Etablir une relation entre ces trois distances.

21 Ecrire une équation de la sphère de centre I et de rayon R dans chacun des cas suivants :
1) I(1, 2, 3) et R = 1
2) I(-1, 0, 3) et $R = \sqrt{2}$

22 Ecrire une équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB]
1) A(-1, 3, 0) et B(0, 0, -2)
2) A(1, -2, 2) et B(1, -1 , -2)

23 Déterminer l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que :
a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 12 = 0$
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 + z + 2x + 2y + 6z - 8 = 0$

24 Etudier dans chacun des cas suivants la position relative de la sphère S et du plan P :
a) $P : x - y = 0$
et $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x -2y - 2z = 0$
b) $P : 2x + 3y - 2z + 1 = 0$
et $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z = 0$
c) $P : x + y = 0$ et $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

25 Soit D la droite définie par ses équations paramétriques
$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda\ ,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2-\lambda \end{cases}$$
et A(0,2,2) un point de l'espace.
1)Ecrire des équations cartésiennes de deux plans dont D est l'intersection.
2)a)Ecrire les équations paramétriques du plan P passant par A et contenant D.
b)Donner une équation cartésienne de P.
3)Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par le point B(0,0,1)
4)a)Ecrire une équation cartésienne du plan R contenant D et perpendiculaire à P.
b) Donner une équation d'une sphère tangente aux plans R et P.
c) Donner une équation d'une sphère tangente aux plans P et Q.

26 L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

on donne les points A(1,1,1) ; B(3,1,0) et C(-1,0,1)

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Soit P le plan déterminé par les points A, B et C. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P est : $x - 2y + 2z - 1 = 0$

c) Soit Q le plan dont une équation cartésienne est $2x + y + 2z + 1 = 0$.

Montrer que les plans P et Q sont sécants.

2) Soit t un réel et le point I_t (1, -1, t)

a) Vérifier que la distance du point I_t au plan P est égale à la distance du point I_t au plan Q.

b) Montrer que si $t = -1$, alors le point I_t appartient à P et Q.

c) Montrer que si $t \neq -1$, alors il existe une sphère S_t de centre I_t et tangente à la fois aux plans P et Q. Quel est son rayon en fonction de t ?

3) Soit $t = 2$.

Déterminer les coordonnées du point H de contact de la sphère S_2 avec le plan Q.

(D'après Bac Tunisien, juin 2005)

Exercice n° 1

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}\vec{v}=(-1)\times0+(-2)\times6+3\times(-4)=-24$

$\boxed{\vec{u}\vec{v}=-24}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{2}\\3\end{pmatrix}$

$\vec{u}\vec{v}=\left(-\frac{2}{3}\right)\times2+(-2)\times\left(-\sqrt{2}\right)+3\times\frac{3}{2}$

$=\left(-\frac{4}{3}\right)+2\sqrt{2}+\frac{9}{2}=\boxed{\frac{19}{6}+2\sqrt{2}}$

$\boxed{\vec{u}\vec{v}=\frac{19}{6}+2\sqrt{2}}$.

Exercice n° 2

I milieu de$[AB]$ et J milieu de$[CD]$.

- $AB=AC=AD=BD=DC=a$.

• $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$.

$= a.a.\cos\frac{\pi}{3}$

donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}}$

•

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$=-\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$.

$=-a.a.\frac{1}{2}=-\frac{a^2}{2}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}}$

- a) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\bullet\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0..$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}=0}$.

•$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{BC}$

$=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0.$

$\boxed{\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{BC}=0}$.

•$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}.=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

$\boxed{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0}$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow(AB)$ et (DC) sont orthogonales. De même pour les droites (AC) et (BD) ainsi que (AD) et (BC) .

3)a) On a: $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

• $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

$=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=0.$

• $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$

$=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CJ}$

$=\overrightarrow{CD}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}.\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}CD^2$

$=0-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=0}$ et $\boxed{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ}=0}$.

b) La droite (IJ) est la perpendiculaire commune des deux droites (AB) et (CD) .

c) d_1 : distance entre (AB) et (CD) . $d_1 = IJ$

or $IJ^2=JB^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ (IJB triangle rectangle en I)

$=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$.(CJB trgle rectgle en J)

$\Rightarrow$ $IJ=\frac{a}{\sqrt{2}}$

De même $d((AC),(BD))=d((AD),(BC))=\frac{a}{\sqrt{2}}$

Exercice n° 3

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P ⇒ P: $x - y + d = 0$.

$A(1,-2,3) \in P \Leftrightarrow 1-(-2)+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

D'où : $\boxed{P:\ x - y - 3 = 0.}$

Exercice n° 4

(CD) est perpendiculaire à P d'où $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur normal de P avec $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$.

Donc P: $x - 4y + 3z + d = 0$

$A(0,1,-2) \in P \Rightarrow 0 - 4\times 1 + 3\times(-2) + d = 0 \Rightarrow d=10$

D'où : $\boxed{P:\ x - 4y + 3z + 10 = 0}$.

Exercice n° 5

$\Delta \perp P \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à P est aussi un vecteur directeur de la droite Δ

D'où $\Delta: \begin{cases} x = 4+2t \\ y = -2-3t \\ z = t \end{cases}, t \in IR$

Exercice n° 6

Le point D(1 ;-2 ;3) est le projeté orthogonal de O sur P

$\Rightarrow \overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P avec.

Donc P: $x - 2y + 3z + d = 0$.

$D \in P \Leftrightarrow 1 - 2\times(-2) + 3\times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -14$.

D'où : $\boxed{P: x - 2y + 3z - 14 = 0}$.

Exercice n° 7

• P: $x - y + z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

P': $-x + y - z = 0 \Rightarrow \vec{n}'\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'

$\Rightarrow \vec{n}' = -\vec{n} \Rightarrow \vec{n}$ *et* $\vec{n}'$ *sont colineaires* ⇒P'//P

• P: $2x + y + z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P.

P': $-x + y - z = 0 \Rightarrow \vec{n}'\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P'.

$\vec{n} \wedge \vec{n}'\begin{pmatrix}0\\-3\\-3\end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{n}$ *et* $\vec{n}'$ *ne sont pas colineaires*

Donc P et P' sont sécants.

Exercice n° 8

● Une équation cartésienne d'un plan admettant $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal est $z + d = 0$ avec $d \in IR$ .Par exemple le plan d'équation $z = 0$ (pour $d = 0$).

● a) On a le plan d'équation $x = 1$ a pour vecteur normal $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et le plan d'équation $y = 0$ a pour vecteur normal $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Comme $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ sont orthogonaux alors ces deux plans sont perpendiculaires.

b) $M(x,y,z) \in (x=1)\cap(y=0) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$.

On pose $z = t$ avec $t \in IR$, on aura un système d'équation paramétrique de leur droite d'intersection est

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$, avec $t \in IR$

Exercice n° 9

• $A(1,0,2)$ et P: $2x - y + z - 2 = 0$ donc d

$$(A,P) = \frac{|2\times 1 - 0 + 2 - 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

$$\boxed{d(A,P) = \frac{2}{\sqrt{6}}}$$

• $A(0,0,-3)$ et P: $2x - 2y + z + 5 = 0$ donc d

$$(A,P) = \frac{|2\times 0 - 2\times 0 - 3 + 5|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{d(A,P) = \frac{2}{3}}.$$

• Déterminons tout d'abord une équation cartésienne du plan P = (BCD) :

On sait que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$ est un vecteur normal de P, avec

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc P: $-x-y-z+d=0$.

$B \in P \Leftrightarrow d=1$.

D'où : P: $x+y+z-1=0$. Par suite d

$$(A,P) = \frac{|-1+1+1-1|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{0}{\sqrt{3}}.$$

$\boxed{d(A,P)=0}$.

Exercice n° 10

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$.

Exercice n° 11

● Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec : $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ avec : $(a',b',c') \neq (0,0,0)$

On a: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

● $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A B et C définissent un plan P .

3) P = (ABC) : $x+y+z+d=0$

$A \in P \Leftrightarrow 1+0+1+d=0 \Leftrightarrow d=-2$.

D'où : $\boxed{P:\ x+y+z-2=0}$

Exercice n° 12

P: $x+y+z+1=0$; P': $x-y+2z-1=0$

● $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

● $$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

● $\vec{w} \neq \vec{0}$ donc P et P' sont sécants suivant la droite Δ ayant pour équations cartésiennes

$$\Delta : \begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ x-y+2z-1=0 & (2) \end{cases}.$$

Posons z = t, on aura: $(1)+(2) \Rightarrow 2x+3z=0$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}z$

$(1)-(2) \Rightarrow 2y-z+2=0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}z-1.$

Donc $\Delta : \begin{cases} x = -\frac{3}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t - 1 \\ z = t \end{cases}$ .t € IR

D'où la droite d'intersection de P et P' est

$$\Delta\left(A(0,-1,0);\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice n° 13

$\vec{u}.\vec{v}=0$.

Montrons que : $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2 \vec{v}$

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, posons $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et

$\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$, on aura : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}bc'-cb'\\a'c-c'a\\ab'-a'b\end{pmatrix}$ d'où

$$\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}abb'-a'b^2-a'c^2+acc'\\bcc'-b'c^2-b'a^2+aa'b\\aa'c-c'a^2-c'b^2+cbb'\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow\ \vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}a(bb'+cc')-a'(b^2+c^2)\\b(cc'+aa')-b'(c^2+a^2)\\c(aa'+bb')-c'(a^2+b^2)\end{pmatrix}$$

On sait que: $\vec{u}\vec{v}=aa'+bb'+cc'=0$

Donc on aura: $bb'+cc'=-aa'; cc'+aa'=-bb'$ et $aa'+bb'=-cc'$

En remplaçant dans les expressions des composantes de $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$; on aura: $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}-aaa'-a'(b^2+c^2)\\-bbb'-b'(c^2+a^2)\\-ccc'-c'(a^2+b^2)\end{pmatrix}$

Finalement $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}-a'(a^2+b^2+c^2)\\-b'(a^2+b^2+c^2)\\-c'(a^2+b^2+c^2)\end{pmatrix}$

D'autre part on a: $\|\vec{u}\|^2=a^2+b^2+c^2$ d'où $\|\vec{u}\|^2\vec{v}$ $\begin{pmatrix}a'(a^2+b^2+c^2)\\b'(a^2+b^2+c^2)\\c'(a^2+b^2+c^2)\end{pmatrix}$.

Conclusion: Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ on aura: $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=-\|\vec{u}\|^2\vec{v}$

Exercice n° 14

- On a:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{-4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{1}{81}+\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{81}{81}}=1$$

De même $\|\vec{v}\|=1$ et $\|\vec{w}\|=1$.

Aussi on a: $\vec{u}\vec{v}=\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}-\frac{16}{81}=0$

$\vec{u}\vec{w}=\frac{8}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\times\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{7}{9}=\frac{32-4-28}{81}=0$.

$\vec{v}\vec{w}=\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\times\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{7}{9}=\frac{4-32-28}{81}=0$.

D'où $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1$ et $\vec{u}\vec{v}=\vec{u}\vec{w}=\vec{v}\vec{w}=0$.

Par suite la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est orthonormée

On a:

$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}\\\frac{7}{9}\end{pmatrix}=\vec{w}$ donc la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe

Exercice n° 15

● $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(AM)\perp(AB)$.

Donc l'ensemble des points M est la droite qui est perpendiculaire à (AB) au point A .

● $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Donc $(AM)//(AB)$ d'où M décrit la droite (AB) .

● **Rectifier** $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\overrightarrow{AM}=0$

$(\vec{u}\wedge\vec{v}).\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow$M∈Plan (A, $\vec{u};\vec{v}$)

● **Rectifier** $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow$M∈la droite passant par A et ⊥au plan P(A, $\vec{u};\vec{v}$).

Exercice n° 16

- L'aire A_1 du triangle CEH:

CEH triangle rectangle en H⇒ $A_1=\frac{1}{2}HC\times HE=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

- L'aire A_2 du triangle CFH:

On a $CF=CH=FH=\sqrt{2}$ donc CFH est un triangle équilatéral

Donc $A_2=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{FH}\wedge\overrightarrow{FC}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{FH}\|\|\overrightarrow{FC}\|.\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|=\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

- L'aire A_3 du triangle CDF:

CEH triangle rectangle en C ⇒ $A_3=\frac{1}{2}CF\times CD=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Exercice n° 17

$M_O(\vec{F})=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}$

● a) $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})\wedge\vec{F}$

$$=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}+\underbrace{\overrightarrow{HA}\wedge\vec{F}}_{\overrightarrow{HA}\text{ et }\vec{F}\text{ colinéaires}}=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}+\vec{0}=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}$$

Donc :

$$\|\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}\|=\|\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}\|=\|\overrightarrow{OH}\|\times\|\vec{F}\|\times\overbrace{\left|\sin(\pm\frac{\pi}{2})\right|}^{1}=OH\times\|\vec{F}\|$$

D'où $\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}\right\| = OH\times\left\|\vec{F}\right\|$

b) Soit $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ deux forces de même vecteur $\vec{F}$ et de même support Δ appliquées respectivement en A_1 et A_2 et O un point quelconque de l'espace.

$M_O(\vec{F_1}) = \overrightarrow{OA_1}\wedge\vec{F} = \left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_1}\right)\wedge\vec{F}$

$= \overrightarrow{OA_2}\wedge\vec{F}+\overrightarrow{A_2A_1}\wedge\vec{F}$

(*or* $\overrightarrow{A_2A_1}\wedge\vec{F}=\vec{0}$ *car* A_2 *et* A_1 *sont deux points de* Δ *et* $\vec{F}$ *un vecteur directeur de* Δ; *donc* $\overrightarrow{A_2A_1}$ *et* $\vec{F}$ *colineaires*)

Donc $M_O(\vec{F_1}) = \overrightarrow{OA_2}\wedge\vec{F} = M_O(\vec{F_2})$

Remarque :

(interprétation :cela veut dire que le moment dépend de la force et de son support et ne dépend pas du point A)

● $M_{O'}(\vec{F}) = \overrightarrow{O'A}\wedge\vec{F} = \left(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OA}\right)\wedge\vec{F}$

$= \overrightarrow{O'O}\wedge\vec{F}+\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}$

$= -\overrightarrow{OO'}\wedge\vec{F}+M_O(\vec{F})$

$= \vec{F}\wedge\overrightarrow{OO'}+M_O(\vec{F})$

● Soit $\vec{F_1}$; $\vec{F_2}$ *et* $\vec{F_3}$ trois forces appliquées respectivement en A_1 ; A_2 et A_3 et de supports respectives Δ_1 ; Δ_2 et Δ_3

- S'il y'en a deux supports confondus ;alors le faite que les trois forces ont une résultante nulle ($\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0}$)implique que le troisième support est // aux autres et par suite les supports sont coplanaires .
- Supposons maintenant que les trois supports sont distincts deux à deux. cela nous permet de supposer (tenant compte de la remarque faite en 1) b)) que A_3 n'appartient ni à Δ_1 ni à Δ_2 .

Le faite que le système formé par ces trois forces a un moment nul par rapport à un point O de l'espace donne

$$M_O(\vec{F_1})+M_O(\vec{F_2})+M_O(\vec{F_3})=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OA_1}\wedge\vec{F_1}+\overrightarrow{OA_2}\wedge\vec{F_2}+\overrightarrow{OA_3}\wedge\vec{F_3}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OA_1}\wedge\vec{F_1}+\overrightarrow{OA_2}\wedge\vec{F_2}+\overrightarrow{OA_3}\wedge(-\vec{F_1}-\vec{F_2})=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_3})\wedge\vec{F_1}+(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_3})\wedge\vec{F_2}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{A_3A_1}\wedge\vec{F_1}+\overrightarrow{A_3A_2}\wedge\vec{F_2}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{A_3A_1}\wedge\vec{F_1}=\vec{F_2}\wedge\overrightarrow{A_3A_2}$$

$$\left(\begin{array}{l}\overrightarrow{A_3A_1}\wedge\vec{F_1}\neq\vec{0}\ car\ A_3\notin\Delta_1; A_1\in\Delta_1\ et\\ \vec{F_1}\ directeur\ de\ \Delta_1\end{array}\right)$$

Or

$\overrightarrow{A_3A_1}\wedge\vec{F_1}$ *est un* vecteur normal au plan $P(A_3;\Delta_1)$

$\vec{F_2}\wedge\overrightarrow{A_3A_2}$ *est un* vecteur normal au plan $P(A_3;\Delta_2)$

$\Rightarrow P(A_3;\Delta_1) // P(A_3;\Delta_2)$ (vecteur normal *commun*)

et par suite $P(A_3;\Delta_1)=P(A_3;\Delta_2)$ (1)[*// et point commun*]

Un travail analogue donnera :

$P(A_2;\Delta_1)=P(A_2;\Delta_3)$ (2)

$P(A_1;\Delta_2)=P(A_1;\Delta_3)$ (3)

Tenant compte du fait que $A_1\in\Delta_1$; $A_2\in\Delta_2$ et $A_3\in\Delta_3$; **Les résultats (1) ;(2)et(3) permet de conclure que les supports Δ_1 ; Δ_2 et Δ_3 sont coplanaires.**

Exercice n° 18

● On sait que :

$\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ vecteur normal de *P*

$\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal de *Q*

Et $\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq0$ donc $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ non colinéaires ce qui montre que les deux plans P et Q sont sécants

● $\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de *D*

●

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$ vecteur directeur de D et D est perpendiculaire à R d'où $\vec{u}$ est un vecteur normal de R et puisque $O\in R$ on aura R : $\boxed{x+7y+5z=0}$

●

$$I(x,y,z)\in R\cap D\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3z=0 & (1)\\2x-y+z-3=0 & (2)\\x+7y+5z=0 & (3)\end{cases}$$

(1) + 2×(2) donne $5x-z-6=0$ donc :

$\boxed{z=5x-6}$ (4)

(1) + 3×(2) donne $7x-y-9=0$ donc :

$\boxed{y=7x-9}$ (5)

Remplaçant (4) et (5) dans l'égalité (3) on aura :

$$x + 7(7x - 9) + 5(5x - 6) = 0 \Leftrightarrow 75x - 93 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{93}{75} = \frac{31}{25}$$

D'où : $y = 7\times\frac{31}{25} - 6 = -\frac{8}{25}$ et $z = 5\times\frac{31}{25} - 9 = \frac{1}{5}$

conclusion : $\boxed{I\left(\frac{31}{25}, -\frac{8}{25}, \frac{1}{5}\right)}$

Exercice n° 19

● $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}$$

Or : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\-2\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD} = 0\times(-1) - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \neq 0$$

D'où A, B, C et D sont non coplanaires

● $AB = 2$; $AC = 2$; $AD = 2$

$BC = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$

$DC = \sqrt{0^1 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$

$BD = \sqrt{1^1 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$

conclusion : comme A,B,C et D sont non coplanaires et AB=AC=AD=BC=DC=BC il résulte que ABCD est un tétraèdre regulier

● Soit h la hauteur du tétraèdre ABCD on a :

$$h = \frac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} = \frac{|-4\sqrt{2}|}{\sqrt{0^2 + (-2\sqrt{2})^2 + 2^2}}$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{h = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

●

$a \in [0, \sqrt{2}]$; $P_a : z = a$

a) $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P_a

* Intersection de P_a et la droite (AC)

$$\overrightarrow{N}\bullet\overrightarrow{AC} = 0 + 0 - \sqrt{2} = \sqrt{2} \neq 0$$

D'où (AC) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en un point F (x_F, y_F, z_F) tels que les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x_F = -\alpha \\ y_F = -1 - \alpha \\ z_F = -\sqrt{2}\alpha \\ z_F = a \end{cases} \quad \alpha \in IR$$

On a donc : $-\sqrt{2}\alpha = a \Leftrightarrow \alpha = -\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{a}{\sqrt{2}}, a\right)}$

* Intersection de P_a et la droite (AD)

$$\overrightarrow{N}\bullet\overrightarrow{AD} = 0 + 0 - \sqrt{2} = \sqrt{2} \neq 0$$

D'où (AD) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en un point G (x_G, y_G, z_G) tels que ces coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x_G = -\alpha \\ y_G = 1 + \alpha \\ z_G = -\sqrt{2}\alpha \\ z_G = a \end{cases} \quad \alpha \in IR$$

On a donc : $-\sqrt{2}\alpha = a \Leftrightarrow \alpha = -\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{G\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{a}{\sqrt{2}}, a\right)}$

* Intersection de P_a et la droite (BC)

$$\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix} = 0 + 0 - \sqrt{2} = \sqrt{2} \neq 0$$

D'où (BC) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en un point I (x_I, y_I, z_I) tels que les coordonnées vérifient les équations paramétriques de la droite (BC) et l'équation du plan P_a donc le système :

$$\begin{cases} x_I = \alpha \\ y_I = -1 - \alpha \\ z_I = -\sqrt{2}\alpha \\ z_I = a \end{cases} \quad \alpha \in IR$$

ce qui donne : $-\sqrt{2}\alpha = a \Leftrightarrow \alpha = -\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{I\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{a}{\sqrt{2}}, a\right)}$

b) $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2 - \sqrt{2}a\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}0\\2 - \sqrt{2}a\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{IH}$

ce qui montre que FGHI est un parallélogramme **(1)**

Aussi on a : $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}a\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2-\sqrt{2}a\\0\end{pmatrix}=0$

Donc (FI) et (FG) sont perpendiculaires **(2)**

D'après **(1)** et **(2)** : FGHI est un rectangle

● a) $a \in \left[0,\sqrt{2}\right] \Rightarrow 2-\sqrt{2}.a>0$

$\Rightarrow FG=\left|2-\sqrt{2}a\right|=2-\sqrt{2}a$ et $IF=\sqrt{2}a$

d'où $P(a)=2\times(FG+IF)=2\times\ (2-\sqrt{2}a+\sqrt{2}a)=4$

$\Rightarrow \boxed{P(a)=4}$

$S(a)=FG\times IF=\ (2-\sqrt{2}a)\times\sqrt{2}a=\ 2\times(\sqrt{2}a-a^2)$

$\Rightarrow \boxed{S(a)=2\times(\sqrt{2}a-a^2)}$

b) Posons $S(x)=2(\sqrt{2}x-x^2)$

On a : $S'(x)=2\times(\sqrt{2}-2x)$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sqrt{2}$
S'(x)		+	0	−	
S(x)	0	↗	1	↘	0

S (a) admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ atteint 1

<u>Remarque</u> : pour cette valeur de a FGHI est un carré

<u>Exercice n° 20</u>

●

$\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$:vecteur normal de P

$\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$:vecteur normal de Q

$\left\{\frac{3}{2}\neq\frac{-2}{-3}\right.$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ non colinéaires d'ou P et Q sont sécants suivant une droite D

●

a)

$a\times(3x-2y+5y-1)+b\times(2x-3y+2z-2)=0$

$\Leftrightarrow$

$(3a+2b)x-(2a+3b)y+(5a+2b)z-(a+2b)=0$

Comme a et b non tous nuls alors :

$(3a+2b)x-(2a+3b)y+(5a+2b)z-(a+2b)=0$ est l'équation cartésienne d'un plan F_{ab}

$M(x, y, z) \in P\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2y+5z-1=0 & (1)\\2x-3y+2z-2=0 & (2)\end{cases}$

$\Rightarrow a\times(1)+b\times(2)=0$

$\Rightarrow M\in plan F$

Conclusion :

$a\times(3x-2y+5y-1)+b\times(2x-3y+2z-2)=0$ est **l'équation cartésienne d'un plan F_{ab} contenant tout point M (x, y, z) $\in P\cap Q$ donc contenant la droite D**

b) D'après la question 2) a) tout plan ayant une équatior cartésienne de la forme :

$a\times(3x-2y+5y-1)+b\times(2x-3y+2z-2)=0$

contient la droite D;et pour qu'il contient le point I (2, 5, 0) il suffit que: a(6-10+0-1)+b(4-15+0-2)=0

$\Rightarrow -5a-13b=0 \Rightarrow$ Par exemple pour a = 13 et b = − 4

d'ou :

$R: 13\times(3x-2y+5z-1)+(-5)\times(2x-3y+2z-2)=0$

$\Rightarrow \boxed{R: 29x-11y+55z-3=0}$

● S d'ou une équation cartésienne de S

d'après 2) a) pour $(a, b)\neq(0,0)$:

$S: (3a+2b)x-(2a+3b)y+(5a+2b)z-(a+2b)=0$

est un plan contenant D ;

Pour que S et P soient perpendiculaires il suffit que le produit scalaire de leurs vecteurs normaux soitt nul ce qui donne

$\overrightarrow{n_S}\bullet\overrightarrow{n_P}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3a+2b\\-2a+3b\\5a+2b\end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow 9a+6b+4a+6b+25a+10b=0$

$\Rightarrow 19a+11b=0 \Rightarrow 19a=-11b$

Donc pour a=11 et b=-19 S et P sont perpendiculaires

D'ou : $\boxed{S: -5x+35y+17z+27=0}$

4)a) rectifier (I au lieu de A)

• $d(I,P)=\frac{|6-10+0-1|}{\sqrt{9+4+25}}=\frac{5}{\sqrt{38}}$

• $d(I,S)=\frac{|-10+175+0+27|}{\sqrt{5^2+35^2+17^2}}=\frac{192}{\sqrt{1539}}=\frac{192}{9\sqrt{19}}$

$\Rightarrow \boxed{d(I,S=\frac{64}{3\sqrt{19}}}$

- Un système d'équation paramétrique de la droite D :

$$D: \begin{cases} x = -11\alpha - \frac{1}{5} \\ y = -4\alpha - \frac{4}{5} & \alpha \in IR \\ z = 5\alpha \end{cases}$$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-11\\-4\\5\end{pmatrix}$ vecteur directeur de D et J($-\frac{1}{5}$, $-\frac{4}{5}$,0) un point de la droite D donc on a :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{11}{5}\\-\frac{29}{5}\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}-29\\11\\55\end{pmatrix} \text{ D'ou}$$

$$d(I,D) = \frac{\|\overrightarrow{IJ}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{29^2+4^2+55^2}}{\sqrt{11^2+4^2+5^5}} = \frac{\sqrt{3987}}{162}$$

$$\boxed{d(I,D) = \frac{\sqrt{443}}{3\sqrt{2}}}$$

b)

$$d^2(I,S)+d^2(I,P) = (\frac{5}{\sqrt{38}})^2 + (\frac{64}{3\sqrt{19}})^2 = \frac{25}{38} + \frac{36864}{1539}$$

$$= \frac{75753:171}{3078:171} = \frac{443}{18}$$

Et on a $d^2(I,D) = (\frac{\sqrt{443}}{3\sqrt{2}})^2 = \frac{443}{18}$

D'ou $\boxed{d^2(I,S)+d^2(I,P) = d^2(I,D)}$

Exercice n° 21

- (S) : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 1$
- (S) : $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2 = 2$

Exercice n° 22

- $M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB} = 0$

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\\-z\end{pmatrix}\bullet\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-x\\-y\\-2-z\end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (-1-x)(-x)+(3-y)(-y)+(-z)(-2-z) =$

$\Leftrightarrow x+x^2-3y+y^2+2z+z^2 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{(S): x^2+y^2+z^2+x-3y+2z=0}$

2) Une deuxième méthode

Le centre de la sphère est le milieu Ide segment [AB]

Le rayon de la sphère est R= $\frac{AB}{2}$

On a :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right) \Rightarrow I\left(1, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$AB = \sqrt{0^2+1^2++(-4)^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow R = \frac{3}{2}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{(S): (x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z-3)^2 = \frac{9}{4}}$$

Exercice n° 23

a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+12 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1 = -12$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = -9 \prec 0$$

Donc l'ensemble des points M est l'ensemble vide

b)

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+(z-1)^2-1 = -5$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = 9 = 3^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (3, – 2, 1) et de rayon R = 3

c)

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-8 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2-1+(y+1)^2-1+(z+3)^2-9 = 8$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2 = 19 = \sqrt{19}^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (–1, – 1, –3) et de rayon R = $\sqrt{19}$

a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+12=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=-12$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=-9\prec 0$$

Donc l'ensemble des points M est l'ensemble vide

b)

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+(z-1)^2-1=-5$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9=3^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (3, – 2, 1) et de rayon R = 3

c)

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-8=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2-1+(y+1)^2-1+(z+3)^2-9=8$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=19=\sqrt{19}^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (–1, – 1, –3) et de rayon R = $\sqrt{19}$

Exercice n° 24

a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$$

D'où S est une sphère de centre I (1,1,1) et de rayon $\sqrt{3}$

On a : $d(I,P)=\dfrac{|1-1|}{\sqrt{1+1}}=0\prec\sqrt{3}$ ce qui prouve que S et P sont sécants suivant le cercle ζ de centre I et de rayon $\sqrt{3}$

b)

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+3)^2-9=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$$

D'où S est une sphère de centre I (1, – 2, – 3) et de rayon $\sqrt{14}$

On a : $d(I,P)=\dfrac{|2\times1+3\times(-2)-2\times(-3)|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{17}}$

$$d(I,P)=\frac{2}{\sqrt{17}}\prec R=\sqrt{14}$$

$\Rightarrow$ S et P sont sécants suivant le cercle de centre H et de rayon r

• $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{14-\dfrac{4}{17}}=\sqrt{\dfrac{234}{17}}$

• Posons $H(x_H,y_H,z_H)$

On sait que H est le projeté orthogonal de I sur le plan P

D'où $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ (vecteur normal de P) sont colinéaires

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IH}=\alpha\overrightarrow{N_P}\\ H\in P\end{cases}\alpha\in IR\Rightarrow\begin{cases}x_H=1+2\alpha\\ y_H=-2+3\alpha\\ z_H=-3-2\alpha\\ 2x_H+3y_H-2z_H+1=0\end{cases}\alpha\in IR$$

$$\Rightarrow 2+4\alpha-6+9\alpha+6+4\alpha+1=0\Rightarrow\alpha=-\frac{3}{17}$$

$$\Rightarrow \boxed{H\left(\frac{11}{17},-\frac{43}{17},-\frac{45}{17}\right)}$$

c)

$$x^2+y^2+z^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+y^2+z^2=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+y^2+z^2=1$$

D'où S est une sphère de centre I (1, 0, 0) et de rayon 1

On a : d = $d(I,P)=\dfrac{|1+0|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\prec 1$

$\Rightarrow$ S et P sont sécants suivant un cercle de centre H et de rayon r

• $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Posons $H(x_H,y_H,z_H)$

$\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (vecteur normal de P) Sont colinéaires

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} = \alpha \overrightarrow{N_P} \\ H \in P \end{cases} \alpha \in IR \Rightarrow \begin{cases} x_H = 1+\alpha \\ y_H = \alpha \\ z_H = 0 \\ x_H + y_H = 0 \end{cases} \alpha \in IR$$

$$\Rightarrow 1+2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)}$$

Exercice n° 25

●

$$D: \begin{cases} x = 1+\lambda \ (1) \\ y = 1-\lambda \ (2) \quad \lambda \in IR \\ z = 2-\lambda \ (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow x+y=2$
$(2)-(3) \Rightarrow y-z+1=0$

D'où les deux plans des équations respectifs :
$x+y-2=0$ et : $y-z+1=0$ sont sécants su droite D
$x+y-2=0$ et : $y-z+1=0$ sont sécants suivant la droite D

● a) le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D donc c'est un vecteur de P car $D \subset P$

E (1,1 2) est un point de D donc c'est un point de P et comme $A \notin D$ alors on aura $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur de P non colinéaire avec $\vec{u}$ par suite les équations paramétriques de P sont :

$$P: \begin{cases} x = \alpha+\beta \\ y = 2-\alpha-\beta \quad (\alpha,\beta) \in IR^2 \\ z = 2-\alpha \end{cases}$$

b) On a : $x+y=2$ donc $\boxed{P: x+y-2=0.}$

3) P et Q sont parallèles donc le plan Q à pour équation cartésienne, Q : $x+y+d=0$ or B (0, 0,1) € Q

$\Rightarrow d=0$ donc $\boxed{Q: x+y=0.}$

4) a) P et R sont perpendiculaires donc le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ de P est un vecteur de R aussi D est incluse dans R donc $\vec{u}$ est un vecteur de R, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de R il résulte :

R : $x-y+2z+d=0$

Comme E est un point de D et D est incluse dans *P*

Donc E appartient à *P* ce qui donne : $1-1+4+d=0$

$\Rightarrow d=-4$ Finalement $\boxed{R: x-y+2z-4=0.}$

$\Leftrightarrow$ ... e aux

$$\frac{|x_I - y_I + 2z_I - 4|}{\sqrt{6}} = \frac{|x_I + y_I - 2|}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow$

$$|x_I - y_I + 2z_I - 4| = \sqrt{3}|x_I + y_I - 2|$$

Par exemple on prend I (4, 0, $\sqrt{3}$)
Donc la sphère de centre I (4, 0, $\sqrt{3}$) et de rayon $\sqrt{2}$ est tangente aux plans *P* et *R*

c) De même le centre J (x_J, y_J, z_J) d'une sphère tangente aux plans *R* et *P* vérifie : $d(I,P)=d(I,R)$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{|x_J + y_J - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_J + y_J|}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow$

$$|x_J + y_J - 2| = |x_J + y_J|$$

Par exemple on prend J (1, 0, 0)
Donc la sphère de centre J (1, 0, 0) et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est tangente aux plans *P* et *Q*

Exercice n° 26

● a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix}2 & -2\\0 & -1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$

D'où $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ce qui montre que A, B et C ne sont pas alignés
b) A, B et C sont non alignés donc ils définissent un seul plan *P*

$$1-2\times1+2\times1-1=0 \Rightarrow A \in P$$
$$3-2\times1+2\times0-1=0 \Rightarrow B \in P$$
$$-1-2\times0+2\times1-1=0 \Rightarrow C \in P$$

Les cordonnées de A, B et C vérifient l'équation donc le plan *P* à pour équation : $x-2y+2z-1=0$

c) on sait que :

$\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ vec normal de P et $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ normal de Q

Et $\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{vmatrix}=-4-2=-6\neq 0$

Donc $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ non colinéaires ce qui montre que les deux plans P et Q sont sécants

a) $\bullet d(I_t,P)=\dfrac{|1+2+2t-1|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{2|1+t|}{3}$

$\bullet d(I_t,Q)=\dfrac{|2-1+2t-1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{2|1+t|}{3}$

$\Rightarrow\ d(I_t,P)=d(I_t,Q)$

b) Pour t = – 1 on trouve $d(I_{-1},P)=d(I_{-1},Q)=0$

Donc I_{-1} appartient à P et à Q

c) pour $t\neq -1$: $d(I_{-1},P)=d(I_{-1},Q)\neq 0$

Donc il existe une seule sphère S_t de centre I_t et de rayon $R=\dfrac{2|1+t|}{3}$ qui est tangente au même temps à P et à Q

On prend t = 2

Le point de contact H de la sphère S_2 et de P est le projeté orthogonal de $I_2\ (1,-1,2)$ sur le plan P

Posons, $H(x_H,y_H,z_H)$

On a : $\begin{cases}\overrightarrow{I_2H}=\alpha\overrightarrow{n_P} & \alpha\in IR\\ H\in P\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_H=1+\alpha\\ y_H=-1-2\alpha\\ z_H=2+2\alpha\\ x_H-2y_H+2z_H-1=0\end{cases}\quad \alpha\in IR$$

$\Rightarrow 1+\alpha-2(-1-2\alpha)+2(2+2\alpha)-1=0$

$\Rightarrow 6+9\alpha=0\Rightarrow \alpha=-\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow\ \boxed{H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})}$